Dall'osservazione AL MODELLO

Conservazione dell'energia nel piano inclinato

Per ottenere la formula che descrive la distanza **d** a cui la sfera tocca terra cadendo da un piano inclinato, si può partire dalla conservazione dell'energia.
La sfera, in cima al piano, ha una certa energia potenziale dovuta al campo gravitazionale terrestre. Quando essa scende e abbandona il piano inclinato, la sua energia potenziale si è ridotta di $\mathbf{mgh_1}$ (dove **m** è la massa della sfera e **g** è l'accelerazione di gravità); se la sfera rotola senza strisciare, trascurando l'attrito, tale energia si trasforma in energia cinetica, come somma della componente dovuta allo spostamento, $\mathbf{\frac{1}{2} mv^2}$, e a quella dovuta alla rotazione[1], $\mathbf{1/5\ mv^2}$, dove **v** è la velocità della sfera al termine dello scivolo. Possiamo quindi descrivere la conservazione dell'energia: $\mathbf{7/10\ mv^2 = gmh_1}$
dalla quale si ha:

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} g h_1}$$

Dal momento in cui abbandona il piano inclinato, la pallina si muove di moto uniformemente accelerato lungo la direzione verticale, e lo spazio che percorre prima di toccare terra è dato da:

$$\mathbf{h_2 = \tfrac{1}{2} g t^2}$$

per cui il tempo che impiega la pallina a cadere una volta abbandonato il piano è dato da:

$$t = \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

Per tale tempo t la pallina è in moto anche lungo la direzione orizzontale e, per il principio di inerzia, la sua velocità v è costante; lo spazio percorso prima di toccar terra sarà:

$$d = vt = \sqrt{\frac{10}{7} g h_1} \sqrt{\frac{2h_2}{g}}$$

da cui la formula che cercavamo:

$$d = 2\sqrt{\frac{5}{7} h_1 h_2}$$

(1) L'energia di rotazione di un corpo è $\frac{1}{2} I\omega^2$, dove **I** è il momento d'inerzia e ω è la velocità angolare. Nel caso di una sfera omogenea di massa **m** e raggio **R**, il momento d'inerzia **I** è dato da: $I = 2/5\ mR^2$; se la sfera rotola su una superficie, spostandosi alla velocità **v**, la sua velocità angolare ω è: $\omega = v/R$.
L'energia di rotazione della sfera E_r è quindi:

$E_r = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\ 2/5\ mR^2 (v/R)^2 = 1/5\ mv^2$

Matematica E REALTÀ

"Questi reiterati scambi tra ragione ed esperienza"

Fin dagli albori, l'uomo si è avvantaggiato delle sue capacità matematiche in molte esigenze quotidiane, come contare il bestiame o misurare un terreno. Queste stesse capacità si sono rivelate sorprendentemente efficaci per comprendere **fenomeni** curiosi o remoti come il galleggiamento di un corpo o il moto della Luna. **Questo metodo si è esteso a molti campi nel corso della scienza moderna.**

" […] nel progressivo sviluppo di una disciplina matematica lo spirito umano […] crea lui stesso nuovi e fecondi problemi […] D'altra parte, sul potere creativo della pura ragione il mondo esterno esercita di nuovo la sua influenza e ci conduce attraverso fatti reali a nuove domande, ci apre nuove regioni della matematica,[…] E' su ***questi reiterati scambi tra ragione ed esperienza*** *che riposano tante analogie sorprendenti, come quell'armonia apparentemente prestabilita, tante volte notata dai matematici, tra le questioni, i modi e le concezioni dei diversi rami della loro scienza".*

David Hilbert 1900

da uno a INFINITO
Al cuore della matematica

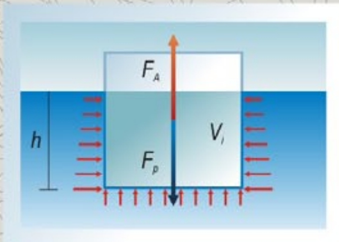
Dall'osservazione
ALLE LEGGI FISICHE

L'osservazione del mondo attorno a noi muove la ragione a indagare su alcuni principi che permettano di predire quali forme la natura predilige, svelandone l'armonia e l'ordine. **Attraverso la matematica la ragione può essere aiutata a cogliere rapporti che i sensi non potranno mai rappresentare.**

Perché l'iceberg galleggia e quant'è il suo volume sommerso?

$$\mathbf{F}_p = d_c \cdot \mathbf{g} \cdot V$$
$$\mathbf{F}_A = d \cdot \mathbf{g} \cdot h \cdot A$$
$$d_c \cdot \mathbf{g} \cdot V = d \cdot \mathbf{g} \cdot h \cdot A$$
$$d_c \cdot V = d \cdot V_i$$

A è la superficie alla base del volumetto; d e dc sono rispettivamente la densità del liquido e quella dell'oggetto; V e V_i sono rispettivamente il volume emerso e quello sommerso.

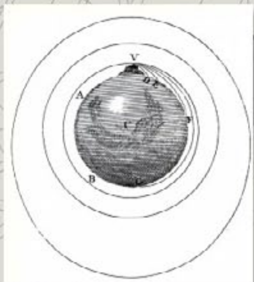


Modello e rappresentazione matematica dell'intuizione di Archimede che ci dice perchè un corpo galleggia e ci permette di ricavare il volume immerso (V_i).

Perché la Luna gira attorno alla Terra? Quanto tempo impiega per fare un giro?

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$
$$\mathbf{F}_{1\to 2} = -\mathbf{F}_{2\to 1}$$
$$F_G = G_N \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Le equazioni di Newton permettono di ricavare il periodo di rotazione della Luna.



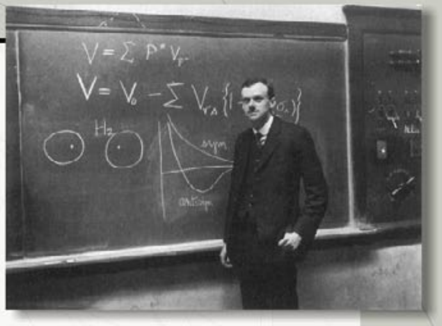
Disegno di Newton utilizzato per spiegare il moto della Luna.

È sorprendente che questo prodotto del pensiero umano consenta di descrivere così bene i fenomeni fisici.

"Noi non sappiamo perché le nostre teorie funzionano così bene".

Wigner 1960

Il linguaggio DELLA NATURA



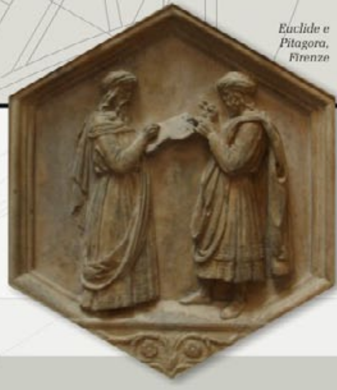
"Sembra essere una delle caratteristiche di base della natura il fatto che le leggi fondamentali della Fisica siano descritte in termini di teorie matematiche di grande bellezza e potenza [...].
Vi chiederete perché la natura sia costruita in questo modo, ma si può solo rispondere che le nostre conoscenze attuali sembrano indicare che le cose stanno in questo modo e si tratta di un fatto che dobbiamo semplicemente accettare. Potremmo forse descrivere la situazione dicendo che Dio è un matematico di grande levatura ed ha usato matematiche molto avanzate per costruire l'universo. I nostri deboli tentativi ci permettono per ora di capire una piccolissima parte dell'universo, e sviluppando della matematica di livello sempre più alto possiamo sperare di comprenderlo meglio".

Paul Dirac, 1930

METHODUS
INVENIENDI
LINEAS CURVAS
Maximi Minimive proprietate gaudentes,
SIVE
SOLUTIO
PROBLEMATIS ISOPERIMETRICI
LATISSIMO SENSU ACCEPTI
AUCTORE
LEONHARDO EULERO,
LAUSANNÆ & GENEVÆ.
MDCCXLIV.

"Poiché infatti la fabbrica dell'Universo è perfettissima ed è governata dal creatore più sapiente, non accade nulla nel mondo, in cui non traspaia qualche ragione di massimo e di minimo".

Leonardo Eulero, 1744



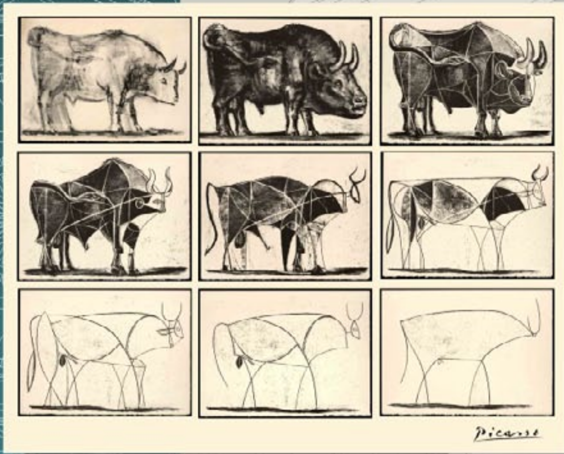
Euclide e Pitagora, Firenze

"I numeri occupano naturalmente il primo posto tra i principi cosmologici, e i Pitagorici credono di scorgere in quelli, più che nel fuoco o nella terra o nell'acqua, un gran numero di somiglianze con le cose che esistono e sono generate [...] pareva loro evidente che i numeri fossero l'essenza primordiale di tutto l'universo fisico".

Aristotele
Metafisica, libro I
(su Pitagora), 500 a.C.

Matematica ALL'OPERA

"Le leggi fondamentali di natura sono semplici ma la loro effettiva azione è complessa".
Richard Feynman 1971

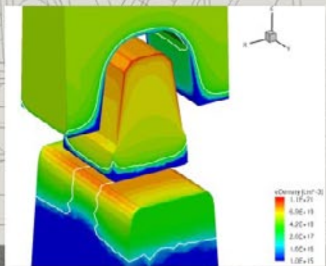


I modelli sono sempre una rappresentazione approssimata della realtà.

L'adeguatezza della matematica a descrivere i fenomeni fisici ha trovato conferma anche nel sempre più efficace utilizzo dei modelli matematici in ambito tecnologico.
L'impossibilità di risolvere in maniera esatta le equazioni che descrivono i sistemi complessi ha dapprima costretto a impiegare modelli semplificati dei sistemi reali, che consentono di rappresentarne con sufficiente accuratezza solo le proprietà medie. L'avvento dei computer ha permesso lo sviluppo di metodi di calcolo numerico con i quali è possibile trattare modelli matematici molto più aderenti alla realtà fisica, sia pure ottenendo soluzioni approssimate. L'efficacia di questi metodi ha favorito la diffusione della simulazione al computer in tutti i settori industriali.

Un esempio emblematico viene dalla microelettronica: la simulazione è infatti largamente impiegata in tutte le fasi dello sviluppo e della progettazione dei circuiti integrati, per descrivere i processi chimico-fisici coinvolti nel flusso di fabbricazione e prevedere le caratteristiche elettriche dei componenti elementari, per simulare il funzionamento dei singoli blocchi circuitali e le funzioni logiche dell'intero chip.

Immagine al microscopio elettronico a trasmissione del dettaglio di una memoria Flash di tipo NAND. Nell'immagine si vedono tre celle di memoria, delle dimensioni di circa 50nm (il nanometro è un milionesimo di millimetro ed è dieci volte la dimensione dell'atomo).



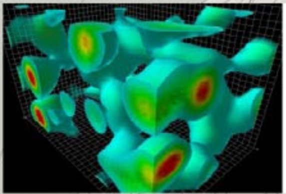
Simulazione tridimensionale di una cella di memoria Flash di tipo NAND; la soluzione numerica delle equazioni del campo elettrico e del trasporto di carica consente di calcolare la densità di elettroni di conduzione, evidenziata con una scala di colori.

Fotografia di un chip di memoria Flash di tipo NAND da 16Gbit. Le memorie Flash sono comunemente usate nei telefoni cellulari, nelle fotocamere digitali, nei riproduttori audio digitali, nelle carte di memoria e nelle chiavette USB.

È sorprendente costatare che i modelli matematici sono in grado di descrivere sistemi fisici tanto complessi con una accuratezza tale da consentirne l'efficace utilizzo nella messa a punto di processi e prodotti industriali.

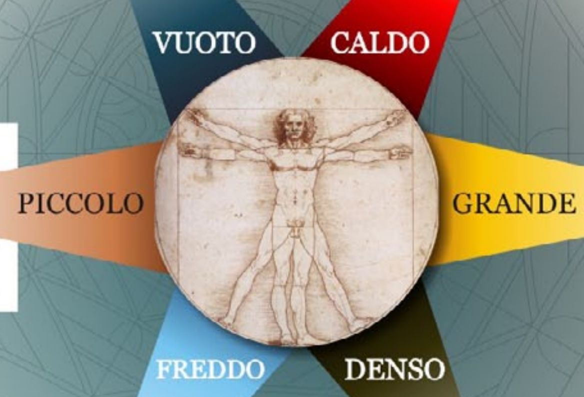
Alle colonne D'ERCOLE

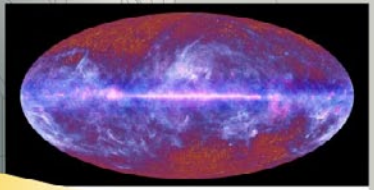
La matematica si dimostra adeguata a descrivere la realtà fisica fino ai suoi confini: alle estremità degli assi della dimensione, della temperatura e della densità di materia. A questi limiti, dove la realtà manifesta aspetti molto diversi da quelli di cui noi abbiamo esperienza diretta, la matematica ci consente di descrivere accuratamente fenomeni che in molti casi facciamo fatica perfino a immaginare.



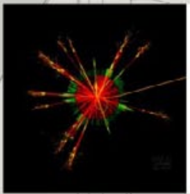
Il vuoto non è vuoto: visualizzazione della densità di carica di colore del campo gluonico che "riempie" il vuoto; questa simulazione è basata sulla cromodinamica quantistica, la teoria che, nell'ambito del modello standard, descrive una delle forze fondamentali, l'interazione forte, e usa la teoria quantistica di campo per descrivere l'interazione tra quark e gluoni. (fonte: Derek B. Leinweber, Università di Adelaide, Australia)

Il sole in laboratorio: il plasma nel Tokamak ASDEX Upgrade del MPI für Plasmaphysik (IPP) a Garching in Germania.

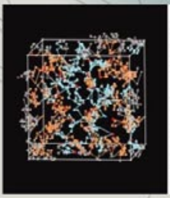




Ai confini dello spazio, all'origine dell'universo: mappa simulata della radiazione di fondo a microonde dell'universo, così come ce la fa vedere il satellite Planck; l'analisi dettagliata delle variazioni della radiazione, che il nuovo satellite consente di rilevare con un'accuratezza mai raggiunta prima, permetterà di affinare i modelli teorici che descrivono l'origine dell'universo e la formazione della galassie. (fonte:ESA, missione Planck)

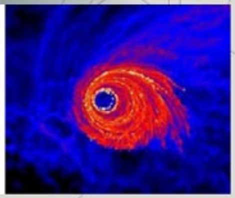


Alla ricerca dei componenti ultimi della materia: simulazione di una collisione protone-protone alla ricerca del bosone di Higgs. L'acceleratore LHC del CERN di Ginevra consentirà, a pieno regime, di raggiungere l'energia necessaria per eventi di questo tipo e di verificare se i bosoni di Higgs esistono davvero. (fonte: CERN Document Server)



Le sorprese al limite del freddo: simulazione della struttura atomica dell'elio in regime superfluido alla temperatura di 0,9 gradi Kelvin. (fonte: Nancy Makri, Illinois University, Urbana Champaign, USA)

I corpi più densi dell'universo: simulazione della formazione di stelle intorno a un buco nero supermassivo. (fonte: Ian Bonnell, Università di St. Andrew, Scozia, UK)



"Alle colonne d'Ercole: navigando ai confini della conoscenza scientifica" è il titolo di una mostra curata da Associazione Euresis per la 24a edizione del Meeting di Rimini.

Quando la matematica ANTICIPA LA FISICA

Dalle equazioni alle onde

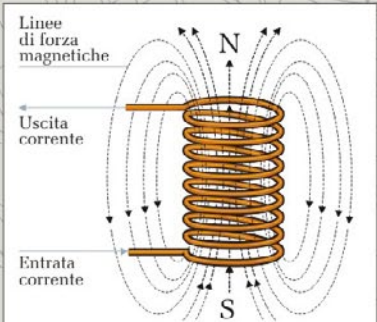
La grande intuizione di Maxwell (1873) è consistita nell'aver compreso la simmetria esistente tra fenomeni elettrici e magnetici: Faraday aveva mostrato che un campo magnetico variabile produce elettricità; Maxwell ipotizza, **pur in assenza di riscontri sperimentali**, che un campo elettrico variabile produca un campo magnetico.
Questa **simmetria** porta alla teoria delle onde elettromagnetiche: una teoria affascinante e rivoluzionaria per l'epoca che **a posteriori riceverà clamorose conferme sperimentali**. Heinrich Hertz nel 1887 ideò un apparato sperimentale capace di verificare le teorie di Maxwell aprendo la strada a Guglielmo Marconi che nel 1901 produsse la prima comunicazione radiotelegrafica transatlantica.

John Clerk Maxwell

“Non c'è nulla di più pratico di una buona teoria”.
J.C. Maxwell
(1831-1879)

Manoscritto di Maxwell

Esperimento di Hertz



Generazione di un campo magnetico da una spira in cui circola una corrente di intensità variabile

Heinrich Rudolf Hertz
(1857–1894)

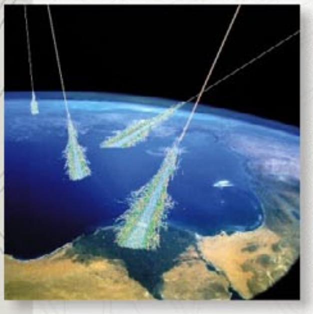
Guglielmo Marconi
(1874-1937)

Quando la matematica ANTICIPA LA FISICA

Una materia misteriosa

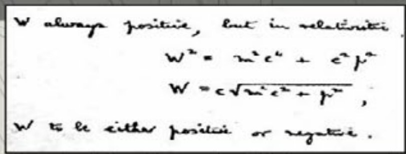
Il pensiero matematico ha talvolta consentito di anticipare fenomeni che neanche erano stati immaginati, e solo in seguito sono stati osservati.

Dopo aver dato un contributo fondamentale alla meccanica quantistica tramite un'equazione d'onda relativistica per l'elettrone, Dirac affronta un nuovo problema che lo porterà a postulare l'esistenza delle antiparticelle (1928). Tale equazione ammette infatti soluzioni anche per energie negative, cosa che, per le conoscenze di allora, non aveva alcun senso. L'energia negativa è una conseguenza della formulazione matematica dell'energia relativistica che ha due soluzioni.
E' cercando di risolvere questa apparente assurdità che Dirac giunse a ipotizzare l'esistenza di una nuova particella: il positrone, che sarà effettivamente scoperta quattro anni dopo da Carl D. Anderson.



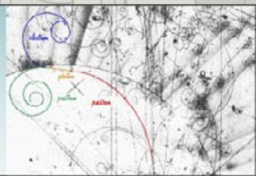
Sciami di raggi cosmici. E' dallo studio di questi sciami che Occhialini e Blanckett hanno identificato il positrone.

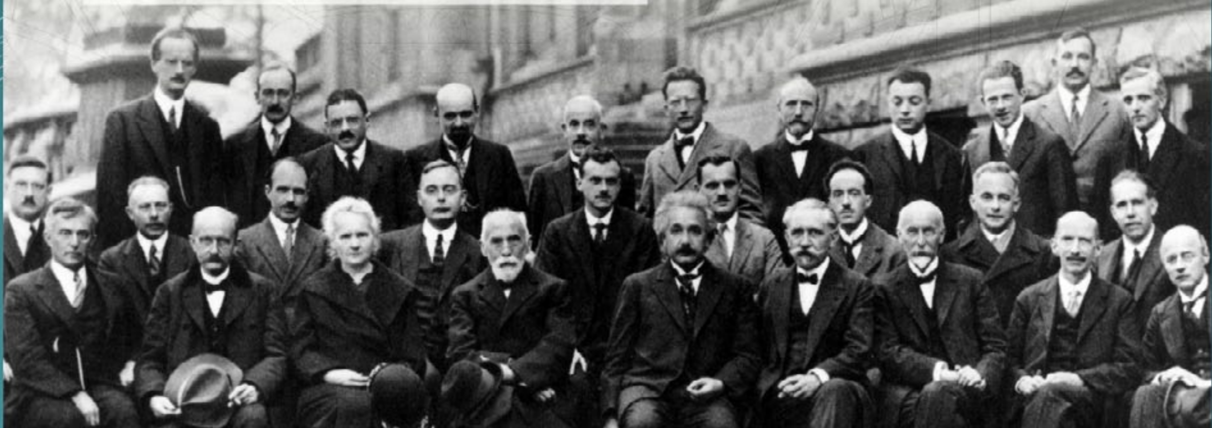
**In molte sue memorie Dirac dice che avrebbe immediatamente postulato il positrone se avesse avuto fede solamente nel potere del puro ragionamento matematico e non si fosse lasciato portare fuori strada dalla fisica empirica.
Questo fu quello che fece Weyl.
Osserva Dirac:
*"Weyl […] era solamente interessato alle conseguenze matematiche di un'idea, estraendo ciò che si poteva dedurre dalle varie simmetrie. Questo approccio matematico lo portò direttamente alla conclusione dell'esistenza di particelle con la stessa massa dell'elettrone […] senza far nessun commento sulle conseguenze fisiche delle sue asserzioni".***



Dal Manoscritto di Dirac *Theory of the positron* presentato al Congresso Solvay nel 1933.

Foto che rivela la traiettoria del positrone in una camera a bolle.





Una sorprendente EFFICACIA

"E' decisamente sorprendente che sia possibile prevedere quello che succederà per mezzo della matematica, seguendo cioè regole che in realtà non hanno nulla a che fare con le cose originali".

Richard Feynman
1971

"Il miracolo dell'idoneità del linguaggio della matematica alla formulazione delle leggi della fisica è un dono meraviglioso che non comprendiamo né meritiamo".

Eugene Wigner
1960

Di fronte all'evidenza dell'efficacia della matematica, prevale lo stupore espresso da Wigner e riecheggiano le parole di Benedetto XVI (Verona 19 ottobre 2006):

"[…] una caratteristica fondamentale delle scienze moderne e delle relative tecnologie è l'impiego sistematico degli strumenti della matematica per poter operare con la natura e mettere al nostro servizio le sue immense energie. La matematica come tale è una creazione della nostra intelligenza: la corrispondenza tra le sue strutture e le strutture reali dell'universo - che è il presupposto di tutti i moderni sviluppi scientifici e tecnologici, già espressamente formulato da Galileo Galilei con la celebre affermazione che il libro della natura è scritto in linguaggio matematico - suscita la nostra ammirazione e pone una grande domanda. Implica infatti che l'universo stesso sia strutturato in maniera intelligente, in modo che esista una corrispondenza profonda tra la nostra ragione soggettiva e la ragione oggettivata nella natura. Diventa allora inevitabile chiedersi se non debba esservi un'unica intelligenza originaria, che sia la comune fonte dell'una e dell'altra. Così proprio la riflessione sullo sviluppo delle scienze ci riporta verso il *Logos* creatore. Viene capovolta la tendenza a dare il primato all'irrazionale, al caso e alla necessità, a ricondurre ad esso anche la nostra intelligenza e la nostra libertà […]".

Avvicinandoci
AL CUORE DELLA MATEMATICA

abbiamo visto come, utilizzando il suo metodo specifico, il pensiero matematico ...

... è andato lontano nel coinvolgimento di persone di culture diverse.
La matematica ha percorso la storia della civiltà umana in ogni sua forma e luogo sviluppando un corpo di conoscenza coerente e organico, universalmente condiviso. Il criterio di verità è proprio dell'essere umano, ed è lo stesso per tutti.

... è andato lontano nello sviluppo del pensiero.
La matematica si è sviluppata enormemente, giungendo a costruzioni estremamente complesse e astratte.
E questo è tutt'altro che scontato: il fatto che le costruzioni logiche possano raggiungere una così grande estensione senza incorrere in contraddizioni paralizzanti è di per se stesso un dato sorprendente.

... è andato lontano nella capacità di cogliere e esprimere l'armonia e la bellezza.
La ricerca del vero, per un matematico, è profondamente intrecciata a una ricerca di bellezza. La matematica è un modo di incontrare la realtà che ne rivela l'ordine, l'armonia, l'eleganza, la semplicità. Ma quelle categorie estetiche che fanno vibrare il cuore del matematico sono suggestive per chiunque, tanto che anche artisti, architetti e musicisti hanno, coscientemente o no, disseminato le loro opere di queste idee.

... è andato lontano nella capacità di leggere la realtà fisica.
Il criterio che guida lo sviluppo della matematica corrisponde all'oggettività delle leggi del mondo fisico. Il linguaggio matematico permette di descrivere accuratamente la natura, compresi fenomeni estremamente lontani dalla nostra esperienza ordinaria. L'esistenza e l'estensione di questa corrispondenza resta un mistero profondo:

*"L'eterno mistero del mondo
è la sua comprensibilità".*

Albert Einstein

Il fascino dell'ordine e della simmetria

Problemi, soluzioni e ... qualcosa di più

25 secoli di pensiero matematico

Fare matematica oggi: tra rigore e bellezza

Dimostrare, cioè sapere perché vale una verità matematica

Di fronte all'infinito, tra libertà e obbedienza

Una stupefacente corrispondenza

Che cosa ci fa essere certi che una affermazione matematica è vera oppure falsa?
Che cosa ci fa dire con sicurezza che un teorema è solidamente dimostrato?
Che cosa permette a queste convinzioni di perdurare nel tempo?

L'universalità, la solidità, l'efficacia del criterio di verità che abita il cuore umano è la strada lungo la quale la matematica è arrivata così lontano e che continuamente offre un percorso al nostro illimitato desiderio di verità.

C'è qualcosa di speciale ma di molto preciso in ciascuno di noi, una sorta di meccanismo nascosto che ci fa dire "vero", oppure "falso" (e non solo "secondo me è vero", "secondo me è falso").

C'è nel soggetto umano, in ogni io, qualche cosa che è capace di riconoscere una verità oggettiva.
È qualcosa di essenzialmente interno alla singola persona, ma al contempo non arbitrario, non manipolabile. Un criterio di verità del tutto indipendente dal nostro stato d'animo tanto quanto lo sono gli oggetti materiali intorno a noi.

È il "cuore", quel criterio di verità con il quale ogni nostra esperienza è giudicata.

"La natura lancia l'uomo nell'universale paragone con se stesso, con gli altri, con le cose, dotandolo - come strumento di tale universale confronto - di un complesso di evidenze ed esigenze originali, talmente originali che tutto ciò che l'uomo dice o fa da esse dipende".

Luigi Giussani

L'esperienza matematica mette a nudo questo dinamismo in modo efficace e paradigmatico.