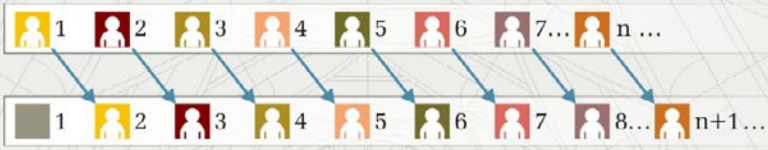
"La parte è grande COME IL TUTTO"

Il "paradosso del Grand Hotel" del grande matematico David Hilbert ha contribuito a illustrare, ai matematici come ai profani, la profonda differenza tra insiemi finiti e insiemi infiniti.
Esso visualizza una situazione che nasce dalla possibilità di corrispondenza biunivoca tra un insieme infinito e un suo sottoinsieme.

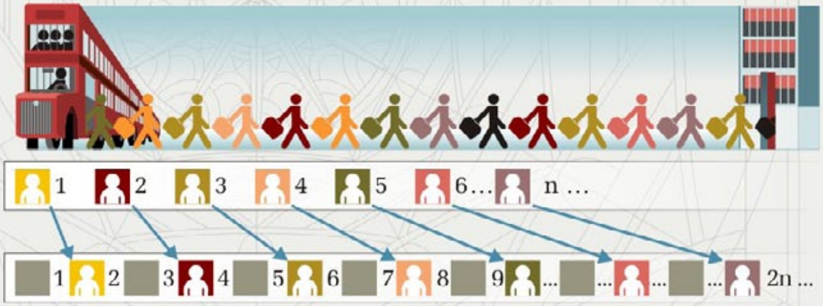
Il Grand Hotel Hilbert è un hotel a infinite stanze. Arriva un nuovo ospite che chiede una camera.



L'hotel è al completo, ma spostando ogni ospite nella camera successiva, è sempre possibile liberare almeno una stanza: la numero 1.

E se arrivasse un pullman di infiniti turisti?

Sarà possibile ospitarli tutti? Sì! Con un opportuno spostamento degli ospiti si possono liberare infinite stanze, per esempio tutte quelle dispari.



Ammettere il paradosso de "il tutto uguale a una sua parte" sembrerebbe un'audacia insensata. Pochi uomini hanno avuto quell'audacia. Tra questi, Dedekind ebbe l'idea di rovesciare la questione: fondare il concetto di infinito sull'equivalenza di una parte al tutto.

Definizione

"Un insieme è infinito quando l'insieme dei suoi elementi è in corrispondenza biunivoca con uno dei suoi sottoinsiemi propri".

Infiniti
A CONFRONTO

Gli insiemi infiniti che corrispondono in modo biunivoco ad N sono detti numerabili. Sono numerabili, per esempio, l'insieme dei numeri pari, l'insieme dei numeri dispari, quello dei quadrati…

L'insieme delle frazioni è numerabile?

Intuitivamente le frazioni appaiono "molte di più" dei numeri interi: infatti, tra due numeri interi ci sono infinite frazioni!
Eppure Cantor ha dimostrato che è possibile trovare un modo per "contare" tutte le frazioni, cominciando a metterle in una tabella infinita …

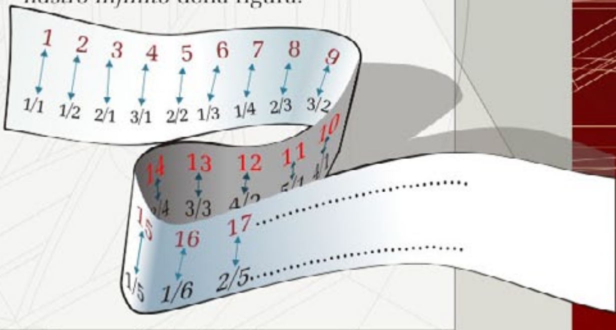
Denominatori

Numeratori	1	2	3	4	5	6	…
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	…
2	2/1	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	…
3	3/1	3/2	3/3	3/4	3/5	3/6	…
4	4/1	4/2	4/3	4/4	4/5	4/6	…
5	5/1	5/2	5/3	5/4	5/5	5/6	…
6	6/1	6/2	6/3	6/4	6/5	6/6	…
7	7/1	7/2	7/3	7/4	7/5	7/6	…

La lettura diagonale mostra che si possono "numerare" tutte le frazioni! Dunque, sorprendentemente, anche l'insieme delle frazioni è numerabile.

Primo metodo diagonale di Cantor

Mettiamo "in fila" tutte le frazioni seguendo le frecce tracciate sulla tabella. Passiamo da tutte le caselle e "preleviamo" la frazione, formando il *nastro infinito* della figura.



**Allora tutti gli insiemi infiniti sono numerabili?
Gli infiniti sono tutti "uguali"?**

Infiniti "PIÙ INFINITI" di altri

> *"Nessuno ci scaccerà dal paradiso che Cantor ha creato per noi".*
> *David Hilbert*

Gli insiemi infiniti sono tutti "uguali"? Sono tutti numerabili? No! Una mirabile dimostrazione di Cantor prova che i numeri reali compresi tra 0 e 1, e quindi a maggior ragione tutti i numeri reali, non sono numerabili.

Le frazioni, scritte in forma decimale, hanno sempre una rappresentazione finita o infinita, ma comunque periodica, per esempio: $1/4 = 0.25$, $1/6 = 0.1666666666...$. L'insieme che comprende anche i numeri decimali non periodici, cioè con infinite cifre che non si ripetono in modo regolare, è l'insieme dei numeri reali R.

Secondo metodo diagonale di Cantor

Supponiamo per assurdo di aver numerato tutti i numeri reali compresi tra 0 e 1. Allora li possiamo mettere in fila l'uno sotto l'altro. Cantor mostra come costruire un nuovo numero compreso tra 0 e 1 che sicuramente è diverso da tutti questi.

1	⟷	0, 3 4 9 0 6 5 8 6 0 3 9 8 8 7 . . .
2	⟷	0, 6 2 8 3 1 8 5 3 0 7 1 7 9 6 . . .
3	⟷	0, 2 6 1 7 9 9 3 8 7 7 9 9 1 5 . . .
4	⟷	0, 1 9 6 3 4 9 5 4 0 8 4 9 3 6 . . .
5	⟷	0, 2 0 4 3 9 9 4 7 5 2 5 6 4 1 . . .
6	⟷	0, 7 8 5 3 9 8 1 6 3 3 9 7 4 5 . . .
7	⟷	0, 3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 8 . . .
8	⟷	0, 2 8 5 5 9 9 3 3 2 1 4 4 5 3 . . .
9	⟷	0, 4 4 8 7 9 8 9 5 0 5 1 2 8 3 . . .
10	⟷	0, 2 4 1 6 6 0 9 7 3 3 5 3 0 6 . . .
11	⟷	0, 3 9 2 6 9 9 0 8 1 6 9 8 7 2 . . .
12	⟷	0, 5 2 3 5 9 8 7 7 5 5 9 8 3 0 . . .
13	⟷	0, 1 8 4 7 9 9 5 6 7 8 5 8 2 2 . . .
14	⟷	0, 2 0 9 4 3 9 5 1 0 2 3 9 3 2 . . .
⋮		⋮
		0, 2 1 2 2 2 2 1 2 2 2 2 2 1 1 . . .

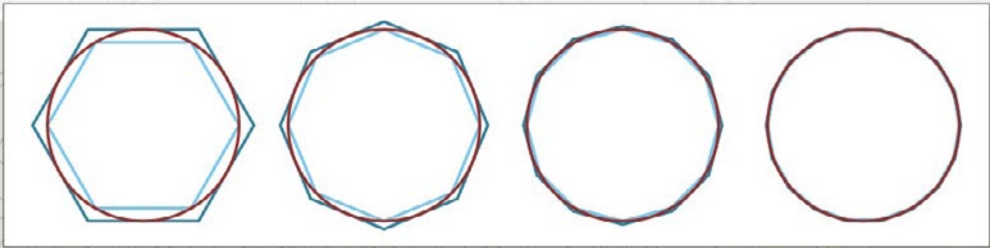
Per ogni numero guardiamo la cifra corrispondente sulla diagonale (cioè la prima cifra del primo numero, la seconda cifra del secondo numero, la terza cifra del terzo...): se questa cifra è 2, scriviamo 1. Se è diversa da 2, scriviamo 2. Il numero così costruito, formato da una sequenza infinita di 1 e 2, è diverso da tutti i numeri della tabella, perché ha almeno una cifra diversa da ciascuno, eppure è compreso tra 0 e 1. Quindi abbiamo ottenuto una contraddizione: l'insieme dei numeri tra 0 e 1 non può essere numerabile!

**Insiemi infiniti che si corrispondono biunivocamente hanno la medesima cardinalità.
La cardinalità dell'insieme N dei numeri naturali si indica col simbolo $\aleph_0$ (si legge aleph zero).**

Con Cantor abbiamo scoperto che esistono diversi "gradi" di infinito: la cardinalità di R è diversa da $\aleph_0$. Potremmo dire che alcuni insiemi infiniti sono "più infiniti" di altri! Ma sempre Cantor ci ha svelato che non esiste un insieme "più infinito" di tutti.
L'infinito continua a stupirci, come ha detto Cantor stesso: "Lo vedo, ma stento a crederci!"

Spingersi al LIMITE

Troviamo in Archimede un primo esempio di procedimento infinito. Per misurare la lunghezza della circonferenza rispetto al diametro, Archimede utilizza i perimetri dei poligoni regolari inscritti e circoscritti. Aumentando via via il numero dei lati, egli ottiene un'approssimazione sempre migliore. Il risultato da lui calcolato con poligoni di 96 lati era esatto fino alla seconda cifra decimale!

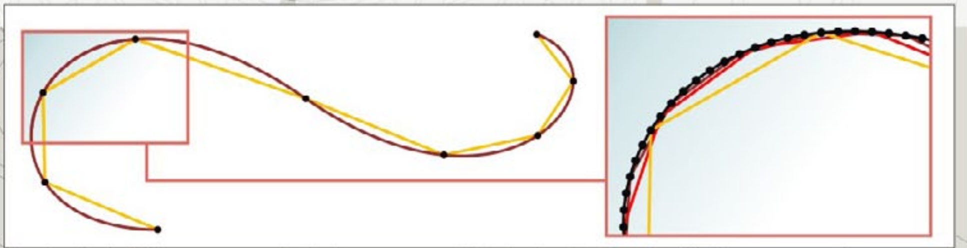


Ma come si può misurare la lunghezza di una curva qualsiasi?

Questo problema si affronta usando il "calcolo infinitesimale", quella parte della matematica che, a partire dal XVII secolo, ingloba nei suoi metodi la possibilità di dividere indefinitamente una grandezza, e di operare su parti infinitamente piccole.

Spingendo oltre l'idea di Archimede, si può ottenere una misura approssimata della lunghezza di un arco di una curva abbastanza regolare, suddividendola in archi e sommando le lunghezze dei segmenti della spezzata che congiunge i punti di suddivisione.

Suddividendo la curva in parti sempre più piccole, la lunghezza della spezzata si "avvicinerà sempre più" alla lunghezza della curva. Ma per raggiungerla dobbiamo immaginare di sommare *infiniti* segmenti *infinitamente piccoli*!

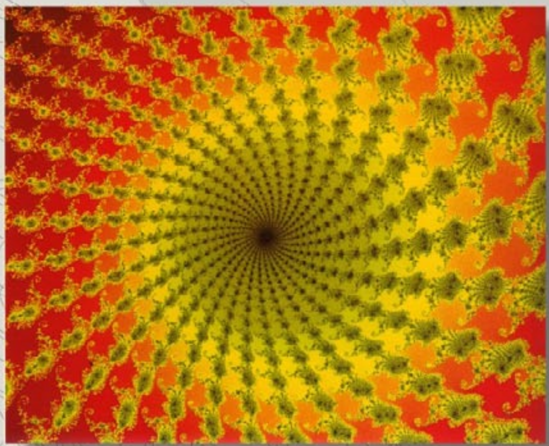


Questa operazione è un significativo esempio di ciò che si chiama passaggio al limite, strumento con cui l'analisi matematica "incorpora" l'infinito nel suo modo di procedere, riferendosi all'infinito potenziale.

SOMMANDO all'infinito/1

Un altro ambito dell'analisi matematica in cui incontriamo l'infinito potenziale è quello delle somme di infiniti termini chiamate serie.

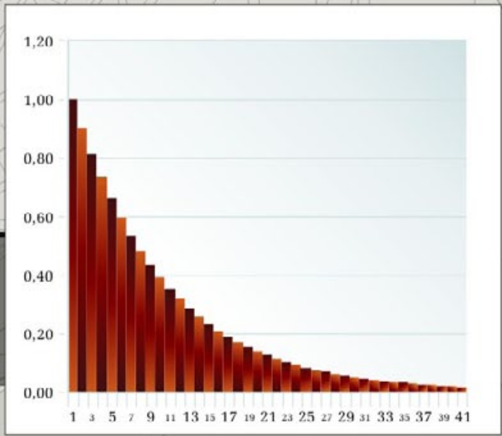
Se sommiamo all'infinito quantità positive crescenti, o quantità positive sempre uguali, anche molto piccole, non abbiamo difficoltà ad affermare che il risultato è sempre più grande: non possiamo cioè che "andare all'infinito". Tecnicamente, diciamo che la serie è divergente all'infinito.



Ma allora, ogni volta che sommiamo infiniti termini è possibile solo un risultato infinito?

La matematica ci aiuta a scoprire che questo non è sempre vero. È sorprendente, eppure è possibile che, sommando indefinitamente quantità che diventano sempre più piccole, non si vada all'infinito, ma al contrario si raggiunga una somma finita. Tecnicamente, diciamo che la serie converge alla sua somma.

Nel grafico è colorata un'area coperta da rettangoli, aventi tutti la stessa base 1, e altezze decrescenti. Immaginando di proseguire all'infinito ad aggiungere rettangolini sempre più piccoli, l'area totale sarà infinita, o può risultare finita?



SOMMANDO all'infinito/2

Una prima sorpresa

Visualizziamo attraverso un puzzle geometrico un risultato di convergenza non intuitivo.

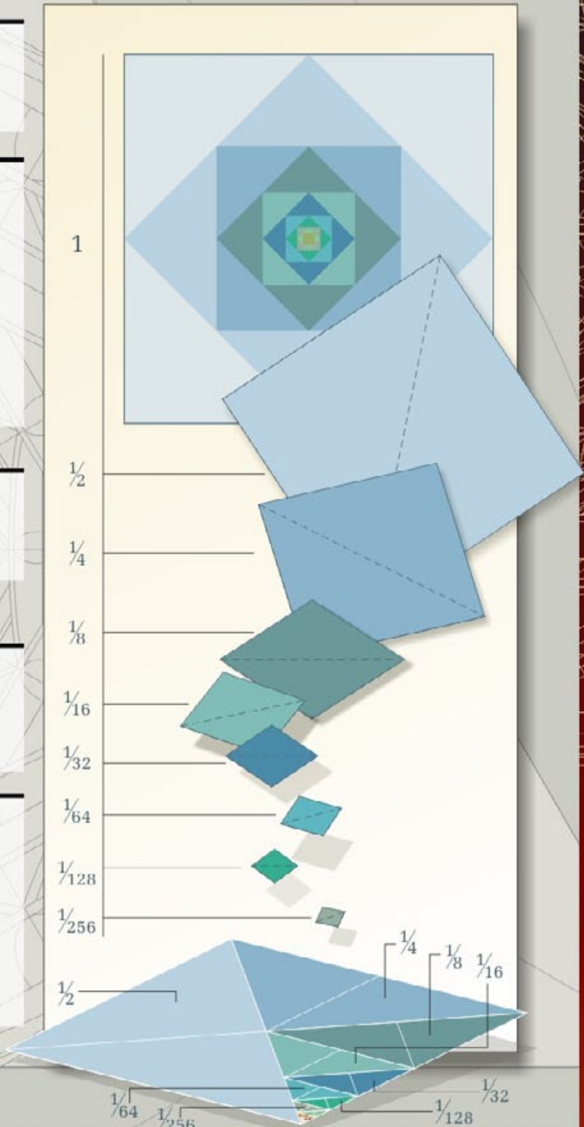
Partiamo da un quadrato, che consideriamo di area 1. Costruiamo una successione di quadrati, in cui l'area di ciascun quadrato è meta dell'area del precedente, immaginando di proseguire all'infinito la costruzione.
Poi tagliamo a metà i quadrati, e con i triangoli rettangoli che li compongono... ricostruiamo il quadrato di partenza!

Vediamo che la somma delle aree di questi infiniti quadrati non è infinita!

Algebricamente, è lo stesso che dire:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots=1$$

Questa infinita addizione si chiama serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ ed è convergente: possiamo anche affermare che la sua somma è 1.
La visione geometrica è convincente, però non possiamo accontentarci.
Il bello è che, con l'analisi matematica, è possibile anche darne una rigorosa dimostrazione.



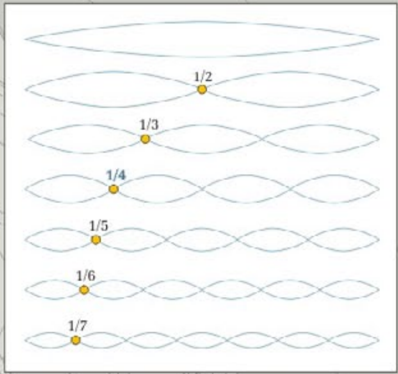
SOMMANDO all'infinito/3

Un fatto nuovo

Allora tutte le somme infinite con addendi positivi sempre più piccoli sono convergenti?

Prendiamo una importante somma infinita, la somma dei reciproci dei naturali chiamata **serie armonica**.

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$



Dalle armoniche della corda vibrante deriva il nome della serie.

I suoi termini diventano sempre più piccoli e si può verificare con una calcolatrice che la serie sembra crescere molto lentamente.
Ma continuando all'infinito cosa succede?
Questa dimostrazione, la più antica conosciuta relativa alla divergenza della serie armonica, è dovuta a Nicola Oresme (XIV secolo). Sommiamo i termini della serie a gruppi di 1, 2, 4, 8, … e vediamo cosa succede.

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>4\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}}_{>8\cdot\frac{1}{16}=\frac{1}{2}}+\ldots}_{>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots}$$

Dunque questa serie è maggiore di una in cui i termini sono tutti uguali a 1/2, perciò è **divergente**.

Per avere una serie convergente, i termini **devono** diventare sempre più piccoli, ma questo **non basta!**

Un "PONTE"... VERSO L'INFINITO

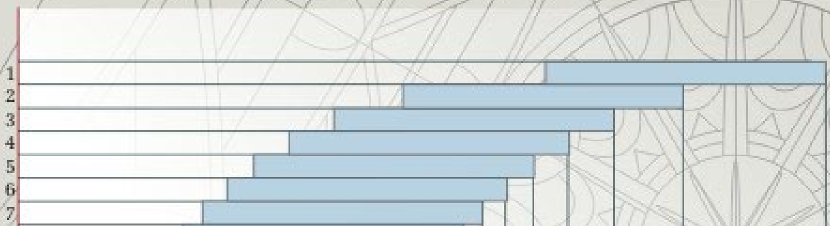
Prendiamo mattoni tutti uguali, per esempio di lunghezza 2, e cominciamo a sovrapporli uno all'altro in modo che il baricentro del sistema, ad ogni aggiunta, si trovi nella posizione “limite” di equilibrio.

Ad ogni nuova aggiunta di un mattone, lo “sbalzo” è $\frac{1}{n}$ dal precedente, e lo “sbalzo” totale è dunque

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

cioè … la **serie armonica**!

Ma poiché abbiamo detto che essa è divergente, potremmo proseguire nella costruzione … all'infinito senza che il ponte crolli!



Sempre più IN LÀ

Quanto più ci addentriamo nella matematica, tanto più la "presenza" dell'infinito si impone, gettando nuova luce su ciò che conosciamo e portandoci a nuove scoperte.
Siamo obbligati ad aprire l'orizzonte della nostra ragione, ad "aguzzare" il nostro sguardo, sia quando vogliamo penetrare "dentro" le cose sia quando esploriamo "interminati spazi".

"L'infinito! Nessun altro problema ha mai scosso così profondamente lo spirito umano; nessuna altra idea ha stimolato così proficuamente il suo intelletto; e tuttavia nessun altro concetto ha maggior bisogno di chiarificazione che quello di infinito".

David Hilbert

Scopriamo che, per indagare l'infinito, è necessario seguire criteri e metodi adeguati, non attaccarci a schemi mentali rigidi. Solo così potremo fare sorprendente esperienza del fatto che, come dice il grande matematico Hermann Weyl,

"la bellezza della matematica è che con essa ci troviamo a quel punto di intersezione tra limitazione e libertà che è l'essenza stessa dell'uomo".

Matematica e REALTÀ FISICA

Una finestra spalancata sul mondo

“L'utilità di considerare le linee, gli angoli e le figure è grandissima, perché senza di essi non si può conoscere la Filosofia Naturale. Essi sono validi in tutto l'universo e nelle singole parti. Hanno validità anche nelle proprietà delle relazioni, come nel moto retto e circolare”.

Roberto Grossatesta
1231

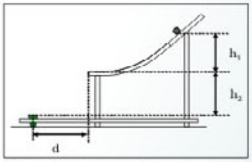
È solo grazie alla matematica che l'uomo può mettere in orbita, in un punto ben preciso dello spazio, i satelliti artificiali.

Dall'osservazione
AL MODELLO

Un linguaggio sorprendente

Osserviamo un semplice fenomeno: il moto di una sfera su un piano inclinato. E' immediato accorgersi che **tanto più elevato è il punto di partenza quanto più la sfera cade lontano**.

Si intravede un “ordine” nel comportamento della pallina: essa non cade “casualmente” ma sembra seguire delle “leggi”.



- h_1 e d sono variabili
- si fissa h_1 e d è calcolato dal PC
- si posiziona il cestellino a distanza d e si lascia cadere la sfera

g = accelerazione di gravità
m = massa sfera
v = velocità sfera al termine dello scivolo
t = tempo che impiega la sfera a cadere
(si trascurano, per semplicità, attrito e rotolamento)

$$\tfrac{1}{2} mv^2 = gmh_1$$
$$v = (2gh_1)^{1/2}$$
$$h_2 = \tfrac{1}{2} g t^2$$
$$t = (2h_2 / g)^{1/2}$$
$$d = vt = (4h_1h_2)^{1/2}$$
$$\boxed{d = 2\,(h_1h_2)^{1/2}}$$

Come si riesce a **rappresentare** questo fenomeno in modo efficace?
Come è legata la distanza di caduta **d** all'altezza $\mathbf{h_1}$?
È possibile esprimere sinteticamente le leggi che governano questo moto?

Come per comunicare immagini e concetti l'uomo ha inventato le parole, così per descrivere i fenomeni fisici, ha adottato uno strumento particolare: la matematica.

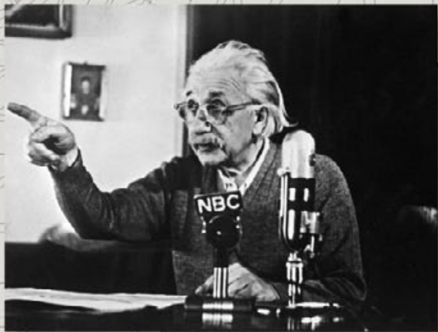
Una semplice relazione matematica (due volte la radice quadrata del prodotto di due grandezze e una frazione) permette di descrivere la distanza **d**:

$$d = 2\sqrt{\frac{5}{7}\,h_1 h_2}$$

Cosa rende questo possibile?

Nella matematica i pensieri e le osservazioni trovano un'espressione sintetica, chiara e precisa, non ambigua, che mette in evidenza le relazioni tra i concetti e permette di trarne conseguenze.
Si acquista così certezza sul fenomeno fisico e si entra più profondamente nella realtà osservata.

A partire dalla formula è possibile interpretare il fenomeno facendo nuove deduzioni: si osserva, per esempio, che la distanza *d* non dipende dalla massa dell'oggetto o dall'angolo di inclinazione del piano; si osserva anche che, tenendo fisso h_2, d risulta dipendere solo da h_1.



La rappresentazione matematica permette di **fare previsioni:** nel caso del piano inclinato, si può prevedere dove la sfera toccherà terra conoscendo l'altezza da cui verrà lasciata cadere. La matematica consente inoltre di **generalizzare**: si può applicare la formula, entro certi limiti, a scivoli di inclinazione diversa e per sfere di massa o volume diversi.