Simmetrie in MUSICA

"L'universo è costruito su una pianta la cui profonda simmetria è in qualche modo presente nella struttura interiore del nostro intelletto".

Paul Valéry

Volta del coro di St. Hugh, Cattedrale di Lincoln 1192 – 1200, Inghilterra

MATEMATICA linguaggio della bellezza

La parola *simmetria* evoca qualcosa di ben equilibrato, un rapporto tra le diverse parti per cui esse si integrano in un tutto. Da sempre la bellezza risulta intimamente legata alla simmetria e la mente umana è attratta da ciò che rivela qualche aspetto di simmetria, come se questa fosse una specie di linguaggio naturale della forma delle cose.

Per il **matematico**, la comprensione della simmetria è una tappa nella ricerca di schemi che descrivono la realtà; per l'**artista** essa è una guida nella creazione di ordine e armonia. C'è allora un legame intrinseco tra la *forma* matematica e il *canone* della bellezza nella natura e nell'arte?

Gli oggetti della teoria musicale sono organizzati secondo strutture precise, che oggi sono ben note. Ma, nel corso della storia della musica, i compositori non sono sempre stati consapevoli dei modelli matematici che descrivono tali strutture.

Solo nel XX secolo, attraverso il concetto matematico di "gruppo", è stata raggiunta la formalizzazione complessiva del concetto di simmetria, che ha permesso la descrizione di oggetti di natura molto diversa come, per esempio, le decorazioni dell'Alhambra di Granada e sorprendentemente anche molte strutture di natura musicale e procedimenti compositivi.

Rosone,
Chiesa di San Pietro,
Assisi

Simmetria ALL'OPERA

Ordine, simmetria e limite
le più grandi istanze del bello

Nel fregio e nel rosone si evidenziano i **tasselli generatori** delle immagini. Indichiamo le trasformazioni elementari: le **traslazioni** (frecce), le **rotazioni** (frecce e centri di rotazione) e le **riflessioni** (linee tratteggiate).

Portale, Santa Caterina d'Alessandria, Galatina

Rosone, Cattedrale di Ostuni

Osserviamo alcune immagini di mosaici, fregi o rosoni. Le loro perfette simmetrie incantano i nostri occhi e affascinano la nostra mente: i bimbi a scuola riempiono i quaderni di "grechine", i pavimenti di molti monumenti lasciano a bocca aperta il visitatore, addirittura i tombini delle città vengono abbelliti con disegni simmetrici. Che cosa **affascina** di queste figure?

Colpiscono la regolarità e la simmetria, ma in che senso? Si nota che l'immagine non cambia girandola o facendola scorrere:

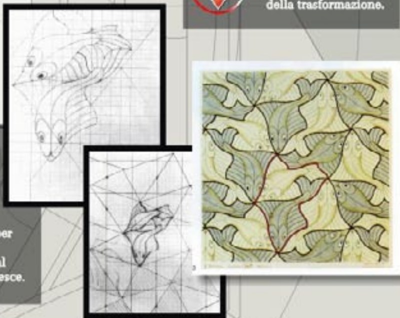
- esistono cioè delle **trasformazioni piane elementari** (traslazione, rotazione, riflessione, …) che, pur muovendo i punti, riportano la figura nella posizione originaria.
- esiste un **"tassello generatore"** con cui si ricostruisce tutto l'oggetto applicando le trasformazioni elementari.

In questo schema vengono mostrate rotazioni di 90°, 180°, 270° e 360° che lasciano invariata la figura. Soltanto l'ultima però riporta i punti esattamente dove erano prima della trasformazione.

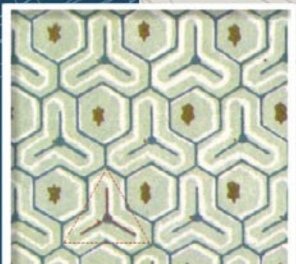
Costruire simmetrie

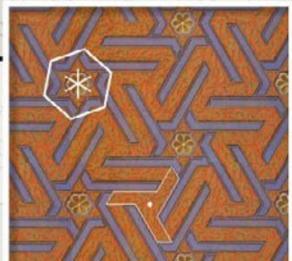
Più sono le trasformazioni che non variano l'immagine, più la figura risulta essere simmetrica. Chiamiamo l'insieme delle trasformazioni che lasciano invariata la figura "**gruppo di simmetria**", perché esso rappresenta la struttura simmetrica dell'immagine.

La struttura simmetrica schematizzata, applicata al tassello generatore, ricostruisce il mosaico. Nell'esempio riportato si parte da una barca stilizzata e si ottiene una figura in cui il tassello è difficilmente riconoscibile.
Immagine di A. Gervasotti



Studio di divisione regolare del piano con pesci, M. C. Escher (1942). È evidente la struttura disegnata dallo stesso Escher per poter costruire il mosaico, a partire dal tassello a forma di pesce.





A sinistra: Ornamento persiano

A destra: Wallpaper Alhambra, Granada

Questi mosaici sono "uguali"?

Per mostrare che sono diversi basta trovare una trasformazione diversa. Ma per mostrare che sono uguali non basta trovarne due uguali! Come fare?

Quanti mosaici diversi è possibile costruire?
È un problema di classificazione!

Da uno a INFINITO
Al cuore della matematica

Ognuno al SUO POSTO

"L'algebra è generosa: offre spesso più di quanto le si chieda".
Jean Le Rond D'Alembert

Nel XX secolo il problema della classificazione dei gruppi di simmetria è stato risolto grazie a una nuova branca dell'algebra, la Teoria dei Gruppi. Essa era nata per affrontare problemi strettamente matematici ma, applicata nel contesto delle simmetrie, ha permesso di darne una descrizione esauriente.

Un importante teorema fornisce i criteri di classificazione:

si comincia con il dividere le tipologie di figure a seconda del numero di direzioni di traslazione e poi per ciascuna tipologia si procede alla classificazione vera e propria.

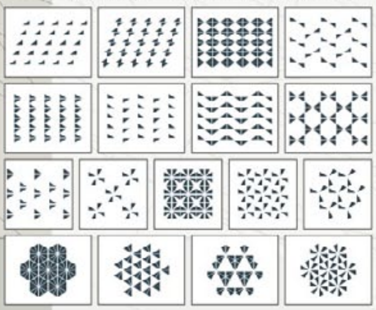
MOSAICI

DUE direzioni di traslazione

Pavimentazione, S. Vitale, Ravenna

I mosaici possono essere solo di 17 tipi

Vengono rappresentati 17 mosaici aventi come tassello generatore il triangolo rettangolo. Ciascun disegno rappresenta un mosaico con un distinto gruppo di simmetria.



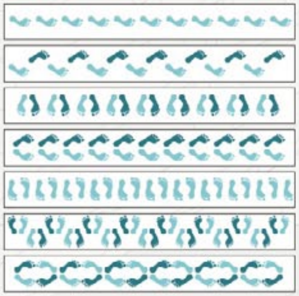
FREGI

UNA direzione di traslazione

Frammento di mosaico pavimentale di villa romana, Museo Palazzo Massimo, Roma

I fregi possono essere solo di 7 tipi

I sette fregi rappresentati posseggono tutti un gruppo di simmetria diverso dagli altri. Ci si può divertire a ricrearli saltellando sull spiaggia!
Dall'archivio immagini del centro matematita (http://www.matematita.it/materiale/)



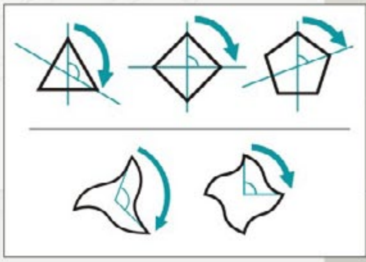
ROSONI

SENZA direzione di traslazione

Rosone centrale, San Francesco, Assisi

E i rosoni ... sono infiniti!

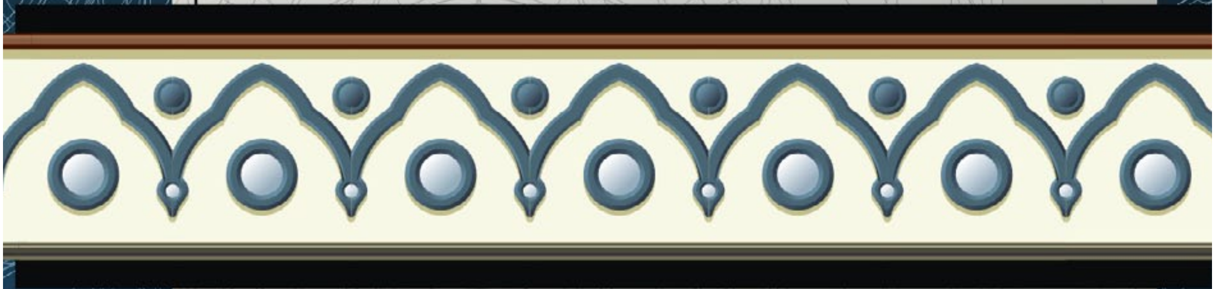
I gruppi di simmetria dei rosoni sono infiniti, ma di due tipi distinti: entrambi posseggono rotazioni (di ordine pari al numero di lati), ma alcuni hanno anche riflessioni (per esempio i poligoni regolari).



Torniamo alle TRASFORMAZIONI

Traslazione

Riflessione

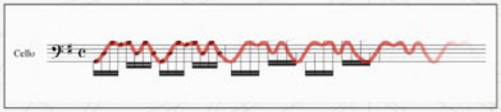


Rotazione

Simmetria IN NOTE/1

> *"La musica è l'aritmetica dei suoni così come l'ottica è la geometria della luce".*
> **Claude Debussy**

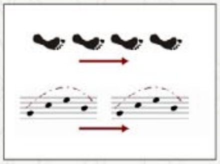
La notazione scritta del linguaggio musicale è il susseguirsi di segni su dei righi (il pentagramma). Anche senza ricostruire il loro significato musicale, la semplice visualizzazione consente un'interpretazione intuitiva: per esempio si può vedere una melodia su uno spartito come una sorta di "linea sonora". Da sinistra a destra la melodia scorre lungo la linea del tempo muovendosi in verticale tra il grave e l'acuto.



Bach, *Suite n.1 per violoncello, Preludio*

Viene spontaneo stabilire un'analogia tra la geometria del segno musicale e le trasformazioni del piano. Cerchiamo quindi la traslazione, la riflessione, la rotazione nelle partiture musicali.

Traslazione orizzontale (in musica *ripresa del tema*)

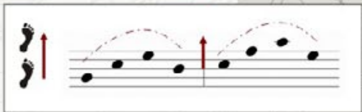


Bach, *Offerta Musicale, canone a 2 Violini in unisono*

In questo spartito di Bach la melodia del Violino I viene spostata verso destra nella parte del Violino II (ascoltando il brano si ha l'effetto di un "inseguimento" tra le voci dei violini).

Traslazione verticale (in musica *trasposizione*)

Mozart inizia questo brano facendo cantare al violoncello un tema sulle note gravi e facendolo riprendere su note sempre più acute prima dalla viola e a seguire dai due violini.

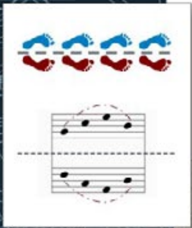


Mozart, *Adagio e fuga per quartetto d'archi K546*

da uno a INFINITO
Al cuore della matematica

Simmetria IN NOTE/2

Riflessione orizzontale (in musica *inversione*)



Mozart, *Adagio e fuga per quartetto d'archi K546.*

In mezzo allo stesso brano Mozart ripropone il tema iniziale, ma lo fa seguire dalla ripetizione dello stesso invertito: se nel tema originale si percepisce uno spostamento verso l'acuto, in quello invertito si ha uno spostamento verso il grave, e viceversa. Questo equivale a una riflessione orizzontale rispetto a una retta opportuna. Il genio di Mozart ripropone i due temi (originale e inverso) anche suonati contemporaneamente!

Riflessione verticale (in musica *retrogradazione*)

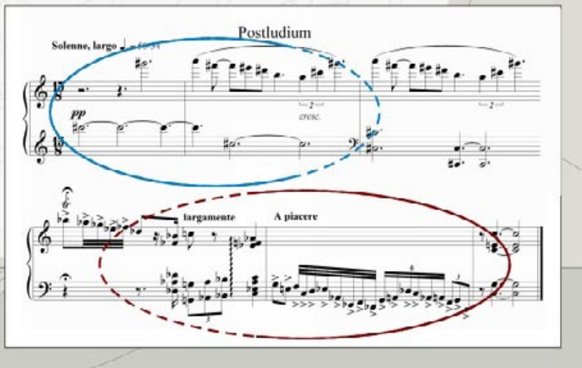
Monteverdi, *Messa a 4 voci a cappella in Sol.*

Cosa succede se si riflettono le note di un tema rispetto a un asse verticale? Le note che si ottengono non sono altro che quelle del tema originale, lette però dalla fine all'inizio. Claudio Monteverdi utilizzò abilmente questo artificio per comporre il *Kyrie* di una sua messa. Ne riportiamo un esempio in cui la melodia esposta dal basso viene retrogradata subito dopo dal tenore (a meno di piccole variazioni nel ritmo).

Rotazione di 180° (in musica *inversione del retrogrado*)

Questa è la più facile da ottenere: basta… mettere il foglio a testa in giù! Se consideriamo il *Preludium* di Paul Hindemith (qui nelle sue prime e ultime battute) e immaginiamo di girare il foglio di 180°, otteniamo esattamente il *Postludium*!

Hindemith, *Ludus Tonalis, Preludium e Postludium.*



Quale ORDINE?

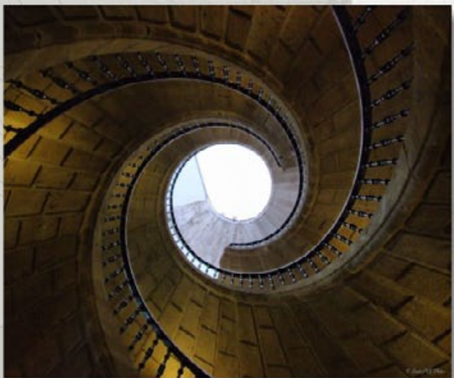
> *"Il cuore umano ama un po' di disordine nella sua geometria".*
> ***Louis de Bernieres***

Nella ricostruzione del preludio di Bach, per ottenere soddisfazione nell'ascolto viene rotta una simmetria troppo elementare. È proprio il "disordine" ottenuto che, lontano dall'essere caos, fa riconoscere e apprezzare la struttura di simmetria che lo ospita.

Bach, *Clavicembalo ben temperato, Preludio in Re maggiore.* Le frecce evidenziano la struttura nascosta.

> *"L'arte, come la vita stessa, è portata a mitigare, sciogliere, modificare e perfino spezzare la rigidezza della simmetria. Raramente però un'asimmetria indica semplicemente un'assenza di simmetria".*
> ***Hermann Weyl***

La ricerca di una struttura nascosta è un'esperienza a noi abituale e accade spesso in modo inconsapevole. Bambini o adulti, restiamo incantati dal continuo stabilirsi e interrompersi di simmetria dell'immagine riflessa nello scorrere di un fiume.



Il modello matematico è una descrizione sempre imperfetta della realtà, eppure… **descrizione è**. Perciò permette una conoscenza più profonda della realtà nell'incanto delle sue imperfette simmetrie.

Il dialogo tra *realtà* e *modello* non ha termine: dopo ogni insuccesso si affina il modello verso nuove conquiste di simmetria e nuove imperfezioni. Eppure il matematico avverte sempre qualcosa di profondo e imponente che sovrasta e domina l'opera intera.

E nel gioco delle forme l'ultima parola è il significato.

Infiniti oggetti
OGGETTI INFINITI

"L'onnipresenza dell'infinito in matematica è sorprendente, poiché l'uomo è un essere finito, limitato, collocato su un pianeta limitato e finito. Eppure, questo essere finito esamina l'infinito e se ne serve, al punto che l'infinito gli risulta indispensabile per comprendere il finito stesso".

Jean Pierre Luminet
Marc Lachièze-Rey

Il finito testimone DELL'INFINITO

Il concetto di infinito, nel senso in cui se ne parla comunemente oggi, è maturato molto lentamente nel corso della storia. Da un lato, è stato oggetto della riflessione filosofica con significati diversi, anche negativi. Dall'altro, per quanto riguarda la matematica, si è affacciato alla mente dell'uomo sotto due aspetti, distinti ma non separabili.

Quando concepiamo la possibilità di processi che possono ripetersi indefinitamente - come quando generiamo tutti i numeri naturali 1, 2, 3, 4, ... aggiungendo sempre una unità - stiamo avvicinando l'**infinito potenziale.**

Se invece parliamo di un "insieme che contiene infiniti elementi", considerandolo come un tutto unico – ad esempio, l'insieme dei numeri dispari - allora abbiamo a che fare con un **infinito attuale**.

C. Brancusi, 1918
La colonna senza fine.

"Infiniti son tutti i numeri I QUADRATI E I CUBI"

Ragionando sui numeri interi, Galileo fu tra i primi a mettere in evidenza che quando trattiamo insiemi che hanno infiniti elementi incontriamo certi fatti *paradossali*.

Associamo, per esempio, ad ogni numero il suo quadrato:

numeri 1 2 3 4 5 6 ...n...

quadrati 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 ... 25 ..... 36 .... n^2 ...

"converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri…".

Galileo Galilei

Oppure, associamo ad ogni numero il suo cubo:

"e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati".

Galileo Galilei

numeri 1 2 3 4 5 ...n...

cubi 1 ...... 8 .... 27 .... 64 .... 125 .... n^3 ...

I quadrati e i cubi sono "tanti quanti" i naturali, eppure ne sono solo una parte. Dunque, negli insiemi infinitamente numerosi possiamo riconoscere "**parti grandi quanto il tutto**".

"Queste son quelle difficoltà che derivano dal discorrer che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno a gl'infiniti, dandogli quegli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso che sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed egualità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro".

Galileo Galilei