La SCOPERTA

Sentire il problema

"Il senso comune prende le cose come sicure, la matematica cerca delle buone ragioni. La certezza deve essere cercata, e la strada che si percorre per raggiungere questo scopo caratterizza la matematica come un'attività, che conduce a versioni sempre più sofisticate di senso comune."

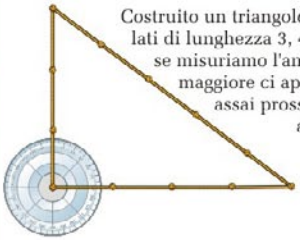
Hans Freudenthal

Il risultato di Pitagora ci è ben noto, ma proviamo a immaginarci nell'atto della scoperta: dimentichiamo di conoscerlo e proviamo a trovarlo. Come pensiamo di muoverci? Dopo alcuni tentativi ci rendiamo sicuramente conto della difficoltà dell'impresa e della notevole conquista di senso fatta da Pitagora.

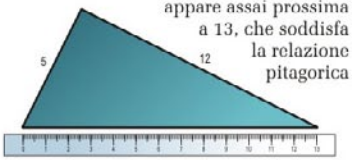
Cambiamo allora prospettiva:

Nota la relazione pitagorica $a^2 + b^2 = c^2$,
come convincerci **che** è *vera*?

Possiamo fare delle verifiche prendendo in esame alcuni casi particolari:



Costruito un triangolo coi lati di lunghezza 3, 4 e 5 se misuriamo l'angolo maggiore ci appare assai prossimo a 90°



Preso un triangolo rettangolo coi cateti lunghi 5 e 12 se misuriamo l'ipotenusa ci appare assai prossima a 13, che soddisfa la relazione pitagorica

Dopo le prime misure di lati o angoli, dobbiamo trarre due gravi conclusioni:

- i risultati concreti non contraddicono il risultato presunto, ma *non* lo avvallano con certezza, non danno *evidenza della verità*
- non abbiamo motivi per credere che il risultato valga in *generale*, cioè per *tutti* i triangoli rettangoli

Ecco, ora siamo in grado di immedesimarci in Pitagora alle prese con questo semplice – irraggiungibile? – risultato. Quale evidenza possiamo avere di ciò che afferma? Siamo in grado di vedere che vale? E di vedere perché vale? Quale prova incontrovertibile possiamo addurre della sua verità?

Se **sentiamo** il problema, comprendiamo bene che Pitagora abbia immolato 100 buoi agli dei, come vuole la tradizione, quando riuscì a *dimostrare* il teorema!

La SCOPERTA

Sentire il problema

"Il senso comune prende le cose come sicure, la matematica cerca delle buone ragioni. La certezza deve essere cercata, e la strada che si percorre per raggiungere questo scopo caratterizza la matematica come un'attività, che conduce a versioni sempre più sofisticate di senso comune".

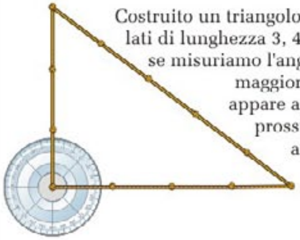
Hans Freudenthal

Il risultato di Pitagora ci è ben noto, ma proviamo a immaginarci nell'atto della scoperta: dimentichiamo di conoscerlo e proviamo a trovarlo. Come pensiamo di muoverci? Dopo alcuni tentativi ci rendiamo sicuramente conto della difficoltà dell'impresa e della notevole conquista di senso fatta da Pitagora.

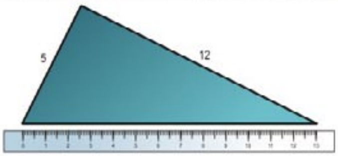
Nota la relazione pitagorica

$$a^2 + b^2 = c^2$$

come convincerci **che** è *vera*?



Costruito un triangolo coi lati di lunghezza 3, 4 e 5 se misuriamo l'angolo maggiore ci appare assai prossimo a 90°



Preso un triangolo rettangolo coi cateti lunghi 5 e 12 se misuriamo l'ipotenusa ci appare assai prossima a 13, che soddisfa la relazione pitagorica

Dopo le prime misure di lati o angoli, dobbiamo trarre due gravi conclusioni:
- i risultati concreti non contraddicono il risultato presunto, ma *non* lo avallano con certezza, non danno *evidenza della verità;*
- non abbiamo motivi per credere che il risultato valga in *generale*, cioè per *tutti* i triangoli rettangoli.

Ecco, ora siamo in grado di immedesimarci in Pitagora alle prese con questo semplice – irraggiungibile? – risultato. Quale evidenza possiamo avere di ciò che afferma? Siamo in grado di vedere che vale? E di vedere perché vale? Quale prova incontrovertibile possiamo addurre della sua verità?

Se **sentiamo** il problema, comprendiamo bene che Pitagora abbia immolato 100 buoi agli dei, come vuole la tradizione, quando riuscì a *dimostrare* il teorema!

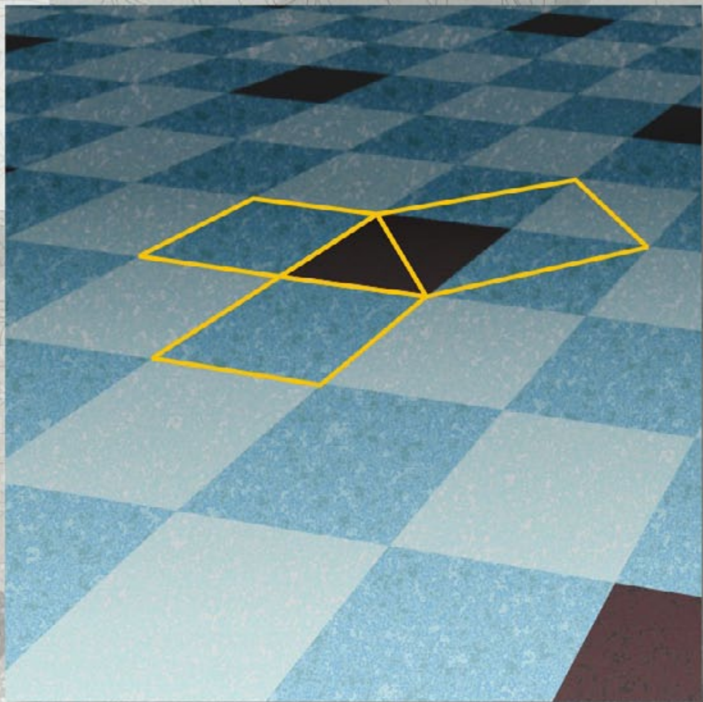
La
PRIMA EVIDENZA

Accade sempre a uno

"Sappiamo che il più sicuro – e più rapido – modo per stupirci è di fissare imperterriti sempre lo stesso oggetto. Un bel momento quest'oggetto ci sembrerà – miracoloso – di non averlo visto mai".

Cesare Pavese

C'è un istante in cui si vede, in cui la realtà diventa trasparente al nostro sguardo che, perciò, può penetrarla e coglierne il significato.

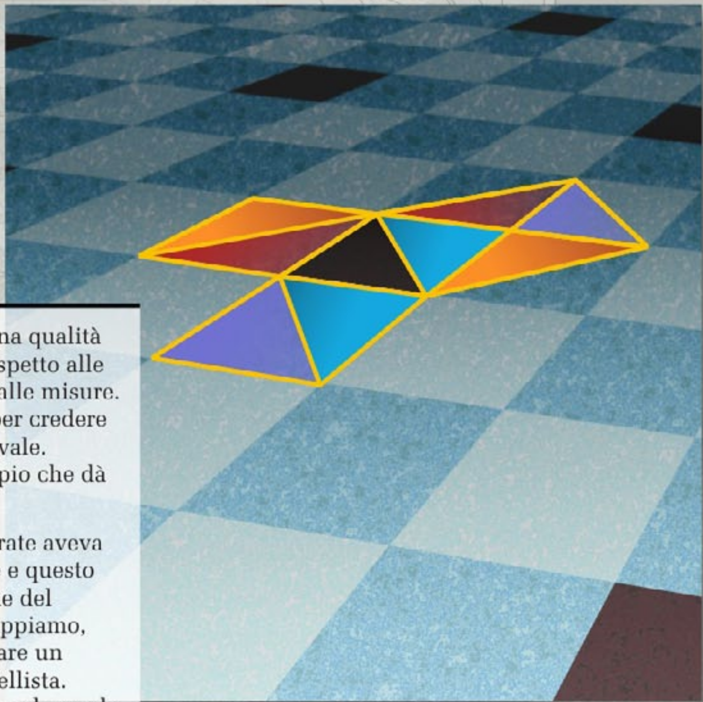


Accade SEMPRE A UNO

La prima evidenza

Si racconta che Pitagora abbia avuto l'idea della dimostrazione del teorema osservando la piastrellatura del pavimento della sala d'attesa di Policrate, tiranno di Samo.

La diagonale di una piastrella divide la piastrella in due triangoli rettangoli isosceli: i quadrati sui cateti sono formati in tutto da quattro di questi triangoli, ma anche il quadrato sull'ipotenusa. Da cui la tesi.



Questa osservazione è di una qualità decisamente differente rispetto alle precedenti, che si affidavano alle misure. Qui si ha una ragione logica per credere al teorema, sappiamo **perché** vale. Finalmente abbiamo un esempio che dà l'evidenza della verità.

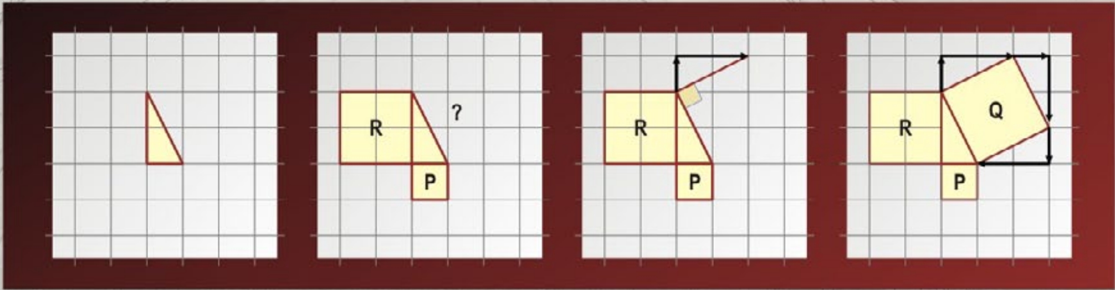
Forse il pavimento di Policrate aveva una piastrella rotta in due e questo ha indirizzato l'immaginazione del grande matematico. Non lo sappiamo, ma se così fosse si dovrebbe fare un monumento all'incauto piastrellista. Senza saperlo, ha dato il la a quel grande percorso di senso che oggi chiamiamo matematica:

la dimostrazione è **la** questione!

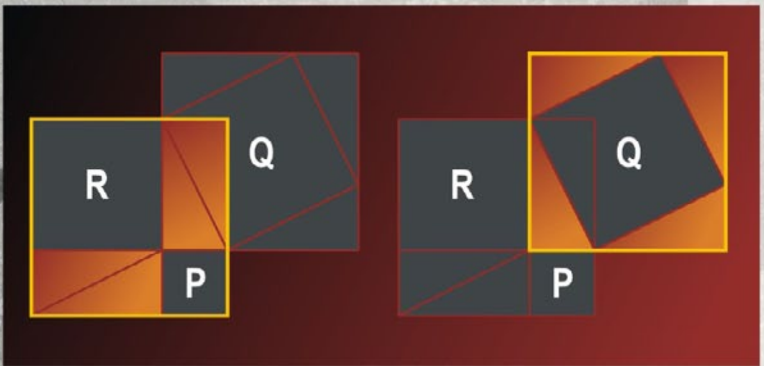
Un passo AVANTI

Più evidente!

Il pavimento di Policrate mostra che il teorema di Pitagora vale nel caso particolare del triangolo rettangolo isoscele (a=b). Ma fa di più: apre la strada per la **dimostrazione generale**. Prendiamo il triangolo non più isoscele, ma per esempio di lati 2 e 1. I quadrati P e R sono formati in tutto da 5 piastrelle. Ora dobbiamo considerare il quadrato Q sull'ipotenusa.



La piastrellatura continua ad aiutarci. Se il lato c non è più la diagonale di una piastrella, possiamo però pensarlo come la diagonale di due piastrelle. Allora saliamo di una piastrella e ci spostiamo di due: così, tracciamo il quadrato Q e vediamo che anche esso è formato da 5 piastrelle, perché sta dentro un quadratone di 9 al quale togliamo 4 triangoli, cioè 4 piastrelle (ogni triangolo è la metà di due piastrelle).
Ecco, ora il teorema è dimostrato!



Anche il triangolo 2x1, a ben vedere, è un caso particolare, ma il passaggio dal triangolo 1x1 a questo, fa capire che il teorema vale sempre perché 'generalizza un metodo', perché i numeri scelti non sono essenziali. Basta mettere in evidenza due volte i quadratoni gialli che contengono il primo P+R e l'altro Q.

Se... ALLORA...

L'evidenza piena

La dimostrazione precedente ci ha convinto, eppure sottace alcuni fatti. Ad esempio, il quadrilatero Q è davvero un quadrato?

Contando astutamente le piastrelle – una in su, due di lato… – ci è sembrato di costruire un quadrato, ma ...

Su che cosa si fonda la nostra fiducia?

Nessun passaggio può essere sostenuto dall'apparenza, dall'immagine che in noi si genera a partire dalla figura: ci vogliono le prove!

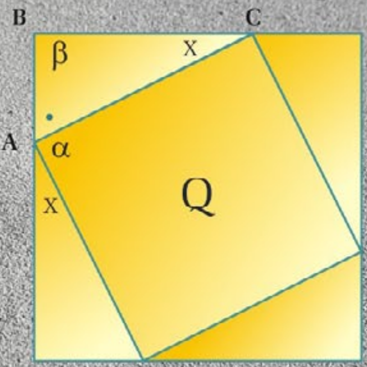
C l'angolo β è retto
D un angolo piatto misura 180°
T La somma degli angoli interni di un triangolo ABC è 180°

Allora:

$\beta = 90°$ vero per **C**ostruzione
$\alpha + \bullet + x = 180°$ vero per **D**efinizione
$\beta + \bullet + x = 180°$ vero per **T**eorema

Per differenza risulta:

$\alpha = \beta = 90°$

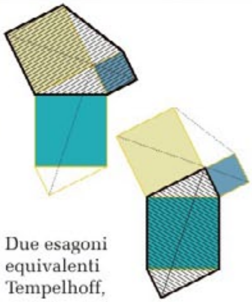


Ora la dimostrazione è **completa. Così vediamo non solo che il teorema di Pitagora è vero, ma anche da quali verità più profonde esso dipende.**

Senza PAROLE

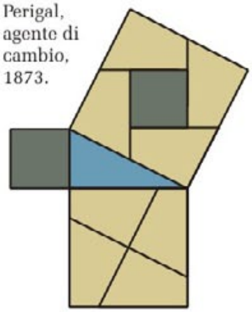
Proof without words

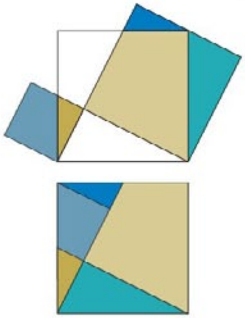
> *"… lo scopo di un racconto del mistero, così come di ogni racconto e di ogni mistero, non è l'oscurità bensì la luce. Il racconto è scritto per il momento in cui il lettore finalmente capirà".*
>
> ***Gilbert Keith Chesterton***

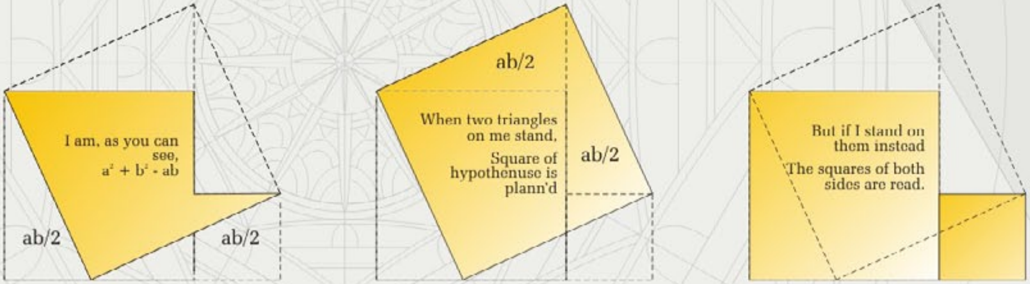


Due esagoni equivalenti Tempelhoff, 1769.

Perigal, agente di cambio, 1873.







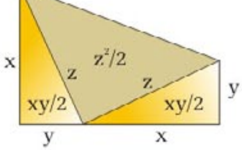
Una dimostrazione in poesia: G.B. Airy, un astronomo del XIX secolo.

$$\frac{(x+y)\cdot(x+y)}{2} = \frac{xy}{2} + \frac{xy}{2} + \frac{z^2}{2}$$

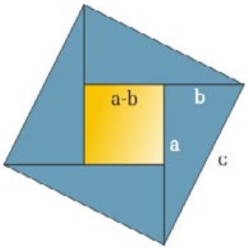
$$x^2 + y^2 + 2xy = 2xy + z^2$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

J.A. Garfield, Presidente degli Stati Uniti d'America, 1876.



$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab = a^2 - 2ab + b^2 + 2ab = a^2 + b^2$$



Generalizzazioni

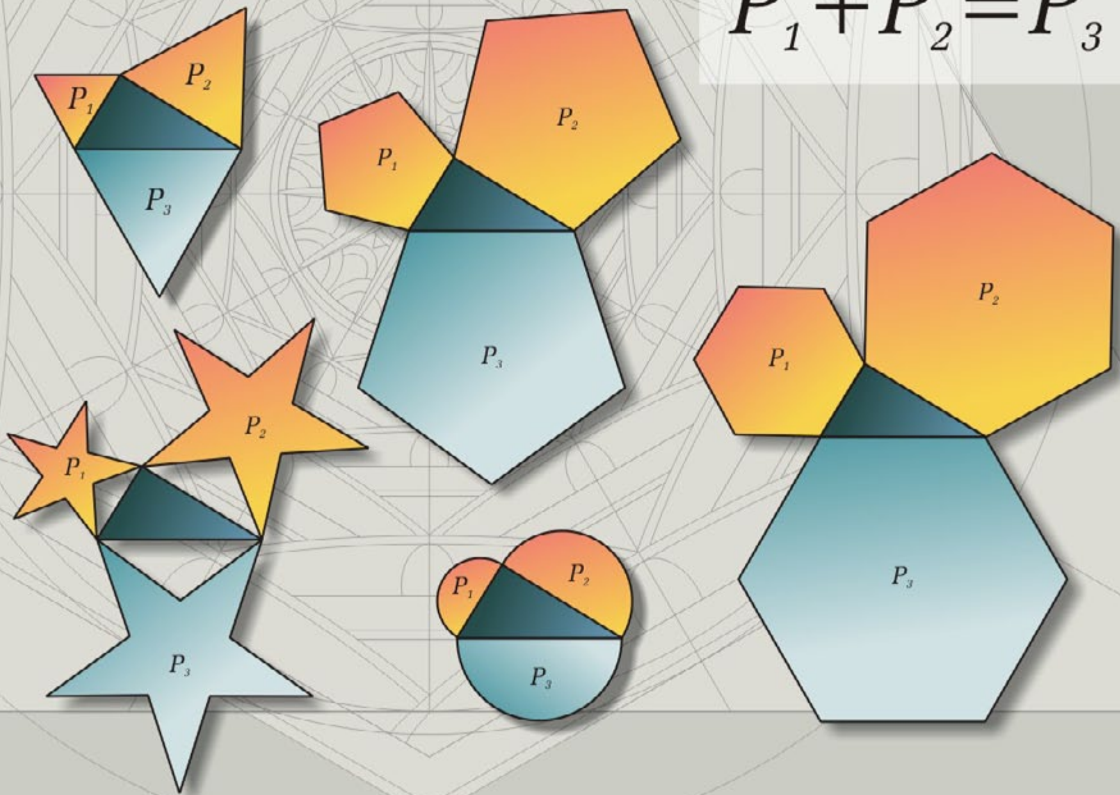
Che immaginazione!

"[La matematica] è una scienza che richiede molta immaginazione. (...) è impossibile essere matematico senza avere l'animo del poeta. (...) immaginazione e invenzione sono la stessa cosa. A me pare che il poeta deve soltanto percepire qualcosa che gli altri non percepiscono, vedere più lontano. E il matematico deve fare la stessa cosa".

Sofja Kowalewskaya

Il teorema di Pitagora continua ad essere valido anche se si sostituiscono i quadrati con triangoli, pentagoni, esagoni... purché siano sempre figure simili fra loro, conservino cioè la stessa forma e differiscano soltanto per le dimensioni.

$$P_1 + P_2 = P_3$$



Da un theorema una THEORIA

Su solide fondamenta

Quando un teorema è dimostrato acquista maggiore *evidenza*:

si vede che è vero, si vede perché è vero, si vede come consegue da altre verità.

Ogni teorema si appoggia su altri teoremi che a loro volta dipendono da altri teoremi…

… quanto indietro si va? Ha una fine questo cammino?

Stiamo cercando gli "antenati" di tutti i teoremi, ricostruendo la loro genealogia. I capostipiti della famiglia di teoremi sono enunciati che non si possono dedurre a partire da altri, ma devono avere evidenza in sé. Sono detti assiomi o postulati.
Così, di evidenza in evidenza, si costruisce una teoria, che è l'insieme delle verità logicamente organizzate.

Euclide (circa 300 a.C.) è stato il primo a comporre in un'opera intera e coerente le proprietà geometriche allora note. La sua opera più famosa intitolata *Elementi* è composta da 13 libri e contiene, tra l'altro, il risultato di questo lavoro di risalita verso gli antenati di tutti i teoremi di geometria: i postulati. Se vogliamo immaginare Euclide all'opera non lo dobbiamo immaginare davanti a un "foglio bianco" su cui comincia a scrivere i cinque postulati dai quali ricavare le altre proposizioni. Dobbiamo invece immaginare una gran quantità di "fogli", che raccolgono tante proprietà geometriche note, con Euclide che inizia a disporli in ordine logico, fino alla scrittura dell'intera opera a partire dai famosi cinque postulati.

I princìpi PRIMI

A volerci veder chiaro

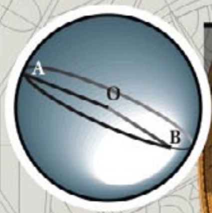
> *"Il matematico fa un gioco di cui è lui stesso a inventare le regole, mentre il fisico fa un gioco le cui regole sono fornite dalla Natura; al passar del tempo diventa però sempre più evidente che le regole che il matematico trova interessanti sono quelle che ha scelto la Natura".*
>
> *Paul Adrien Maurice Dirac*

La geometria si presenta come una descrizione 'ideale' del mondo così come lo vediamo, nella quale si riconoscono le principali proprietà geometriche, organizzate dal punto di vista logico.

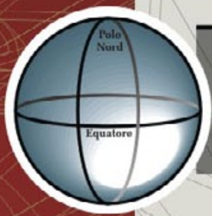
Ma se cambiamo gli assiomi di partenza, che cosa succede? Quale universo descriviamo?

Se cambiamo gli assiomi allora cambia tutto

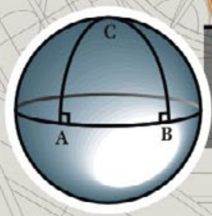
Sulla sfera quelle che nel piano chiamiamo 'rette' possono essere considerati i cerchi massimi



Per due punti A e B della sfera passa uno e un solo cerchio massimo perché nello spazio per tre punti A, B, O passa un solo piano



I cerchi massimi passanti per il polo Nord sono i meridiani, che necessariamente attraversano l'equatore



Il triangolo ABC ha due angoli retti, quindi la somma degli angoli interni supera 180°

Sulla sfera **non** vale il postulato delle parallele

Consideriamo, per esempio la 'retta' r data dall'equatore e il punto P posto al polo Nord, allora ogni retta (cerchio massimo) passante per P interseca l'equatore. Cioè:
data una retta r e un punto P fuori di essa non esiste nessuna retta parallela a r e passante per P.

Osserviamo che in questa "geometria sferica" viene a cadere il teorema sulla somma degli angoli interni di un triangolo. Ci aspettiamo che qui non valga il teorema di Pitagora, che si basa sul teorema T sulla somma degli angoli di un triangolo. Cambiando gli oggetti di cui parlano i nostri "principi primi" cambiano le loro proprietà di partenza, quindi cambia la teoria.

La DIMOSTRAZIONE

"Ciò che è proprio della ragione non sono le sue presunte evidenze, né il suo rigore empirico o logico, ma è innanzitutto la forza dell'impressione della realtà, secondo la quale la realtà profonda si impone nell'intelletto senziente.

Il rigore di un ragionamento non cessa di essere l'espressione della forza della realtà, della forza con la quale si sta imponendo a noi la realtà in cui già stiamo impressivamente.

Pertanto, il problema della ragione non consiste nel verificare se è possibile che la ragione giunga alla realtà, ma proprio il contrario: in che modo occorre mantenerci nella realtà nella quale già stiamo. Non si tratta di giungere a essere nella realtà, ma di non uscire da essa".

Xavier Zubiri