da uno a INFINITO
Al cuore della matematica

PIETRE MILIARI

L'esplosione del CALCOLO INFINITESIMALE e delle sue applicazioni alla fisica matematica nel XVIII-XIX sec.

PIETRE MILIARI

Le geometrie NON EUCLIDEE

Il quinto postulato della geometria di Euclide

È il famoso postulato delle parallele:

"Dati, in un piano, una retta r e un punto P fuori di essa, esiste un'unica retta passante per P e parallela ad r".

Questo postulato fu oggetto di molte critiche, in quanto considerato meno "evidente" degli altri. Si sperò di poterlo dimostrare a partire dagli altri, finché nel XIX secolo fu dimostrato che esso è logicamente indipendente.

Assumendo come premesse della geometria gli altri postulati di Euclide ma un **diverso** (e alternativo) **"quinto postulato"**, si arriva alle *geometrie non euclidee*, in cui valgono teoremi "strani" e non intuitivi, che tuttavia costituiscono una teoria altrettanto rigorosa.

Le geometrie non euclidee avranno un'enorme ripercussione metodologica nel modo di pensare la matematica. Com'è possibile infatti che teorie diverse, altrettanto "valide", facciano affermazioni contrastanti sui medesimi oggetti (punti, rette, piani)?

Si comincia a capire che gli oggetti di cui parla la matematica non sono definiti dai loro "nomi" o dalle nostre intuizioni a loro riguardo, ma proprio dagli **assiomi** che stabiliamo su di essi: il punto, la retta, il piano della geometria non euclidea sono oggetti diversi rispetto a quelli della geometria euclidea. È la cosiddetta "rivoluzione assiomatica".

Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792-1856, a sinistra) e János Bolyai (1802-1860, a destra), intorno al 1820, introducono le geometrie non euclidee.

1820 circa

Gli insiemi
"TOTALITÀ DI INFINITI OGGETTI"

Sul finire del XIX secolo emerge in varie discipline matematiche l'uso del concetto di **insieme**. Sono soprattutto gli insiemi infiniti (come l'insieme dei numeri interi, l'insieme dei numeri reali e altri molto più astratti) che sfidano l'intuizione ma appaiono un ingrediente irrinunciabile della matematica.

$$\aleph_0$$

Il simbolo "aleph zero", dalla prima lettera dall'alfabeto ebraico, *aleph*, è usato da Cantor per indicare la numerosità dell'insieme dei numeri interi.

A Georg Cantor (1845-1918) per primo si deve lo studio sistematico degli insiemi infiniti e in particolare della loro "numerosità" (*cardinalità*). Con lui l'*infinito attuale* diventa "pane quotidiano" del matematico.

Il concetto di insieme è diventato parte essenziale del linguaggio e della strumentazione di tutte le matematiche e ha profondamente influenzato la fisionomia della matematica del XX secolo:

- il concetto di insieme è lo strumento naturale per generare sempre nuovi livelli di *complessità* degli oggetti matematici (insiemi di numeri, insiemi di funzioni…);
- il concetto di insieme permette la definizione e lo studio di *"strutture astratte"*, che caratterizza soprattutto le discipline più algebriche della matematica.

1880 circa

Matematiche ESEMPLARI

Piastrelle E POLIEDRI

Dare un volto concreto a ciò che è astratto

"I SOLI CASI POSSIBILI SONO..."

In quali modi è possibile ricoprire un piano con piastrelle tutte uguali? È il problema delle *pavimentazioni (o tassellazioni) regolari del piano*. Per renderlo meno vago, limitiamoci a considerare piastrelle a forma di **poligoni regolari** (tutti gli angoli e tutti i lati uguali). Si può dimostrare che solo *triangolo equilatero*, *quadrato* ed *esagono regolare* risolvono il problema.

Sono tre forme geometriche molto semplici e probabilmente ci sarebbero venute in mente con facilità. Ma un teorema garantisce che *non ci sono altre soluzioni*; ed è questa la parte più interessante della ricerca.

Si tratta di un problema di *caratterizzazione*: si dà una definizione astratta e poi si cerca di determinare *gli unici* oggetti concreti che la soddisfano; detto altrimenti, si vuole *caratterizzare l'insieme delle soluzioni del problema*.

Se si lascia cadere l'ipotesi che i poligoni siano regolari, e si considerano per esempio **poligoni convessi qualsiasi**, la classe delle piastrelle possibili si allarga: ad esempio, si possono usare parallelogrammi, trapezi isosceli, triangoli isosceli,...

Si vede quindi l'importanza fondamentale **di precisare la classe di oggetti** in cui si cerca la soluzione di un problema.

Matematiche ESEMPLARI

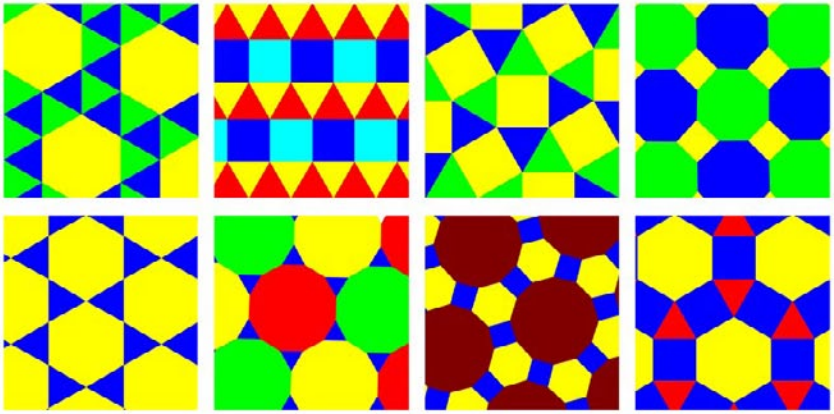
Piastrelle E POLIEDRI

Generalizziamo

In quali modi è possibile ricoprire un piano con piastrelle eventualmente diverse tra loro ma tutte a forma di poligono regolare? Anche in questo caso occorre fare qualche precisazione:

1. Due piastrelle adiacenti devono avere un lato intero in comune, oppure solo un vertice;
2. La disposizione delle piastrelle attorno ad ogni vertice è la stessa.

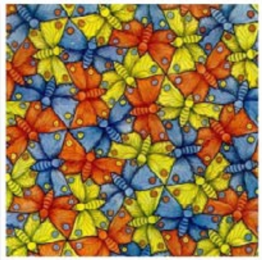
I tre esempi già visti vanno senz'altro bene; ma ci chiediamo quanti altri ce ne siano. Ha risposto **Keplero** nel 1619, dimostrando che **le pavimentazioni che soddisfano la richiesta sono esattamente 11: le 3 precedenti e le seguenti 8:**



A partire dalla fine del XIX sec., questi problemi sono stati studiati in relazione a questioni di *cristallografia* e più in generale nello studio delle *simmetrie negli spazi euclidei* di dimensione qualsiasi.

Se lasciamo cadere la richiesta che le piastrelle siano poligoni regolari e ammettiamo forme qualsiasi, le pavimentazioni possibili, anche imponendo qualche condizione di periodicità (ed eventualmente richiedendo che le piastrelle siano tutte uguali) diventano infinite.

Un esempio di tassellazione che ricopre una parete dell'Alhambra, a Granada.



La fantasia dell'artista olandese Maurits C. Escher ha creato piastrellazioni regolari del piano mediante forme di farfalle o creature fantastiche.

Matematiche ESEMPLARI

Piastrelle E POLIEDRI

I poliedri regolari

Un problema analogo a quello delle pavimentazioni consiste nel determinare tutti i **poliedri regolari**. Con ciò intendiamo una figura solida tale che:

- le facce, tutte uguali fra loro, sono poligoni regolari;
- in ogni vertice concorre lo stesso numero di facce;
- il poliedro è convesso (cioè "non ha rientranze").

Si dimostra che i poliedri che soddisfano queste richieste sono *esattamente* i cinque seguenti (conosciuti fin dall'antichità come **solidi platonici**):

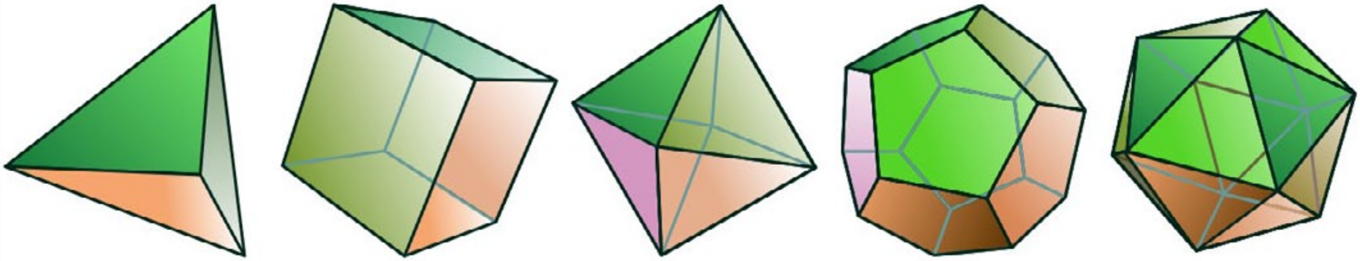
tetraedro
4 facce triangolari

cubo
6 facce quadrate

ottaedro
8 facce triangolari

dodecaedro
12 facce pentagonali

icosaedro
20 facce triangolari



Un mosaico romano che rappresenta una pavimentazione mediante esagoni, quadrati e triangoli equilateri. Colonia, Romisch-Germanisches Museum.

Anche in questo caso ciò che viene apprezzato da un matematico è la possibilità di *dare un volto concreto a un concetto astratto*: gli oggetti che soddisfano la definizione di poliedro regolare sono questi cinque *e nessun altro*.

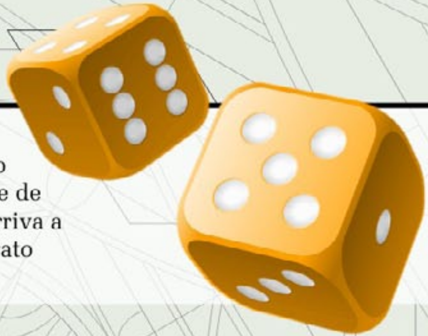
Matematiche ESEMPLARI

Probabilità, passeggiate aleatorie E PROCESSI CASUALI

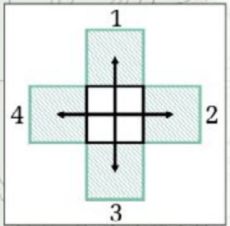
Cercare un ordine nel caso e nel caos

Blaise Pascal
(1623-1662)

Il ***calcolo delle probabilità***, nato storicamente nell'estate del 1654 da uno scambio di lettere tra Blaise Pascal e Pierre de Fermat su problemi di giochi d'azzardo, arriva a descrivere in modo incredibilmente accurato profondi fenomeni fisici o di altro tipo.



Pierre de Fermat
(1601-1665)



Prendiamo l'esempio della **passeggiata aleatoria nel piano**:
su una grande scacchiera una pedina si muove di una casella alla volta, in una delle 4 direzioni possibili, in base al lancio di un dado a 4 facce.
Ci chiediamo:

Dove arriverà nel tempo?

Quali regolarità si celano dietro l'apparente caoticità delle traiettorie?

Mediamente ci aspettiamo di ritrovarla al punto di partenza. (Poiché è altrettanto probabile che vada a destra o a sinistra, in alto o in basso, non abbiamo ragioni per scommettere sul fatto che andrà da una parte piuttosto che da un'altra). Al tempo stesso, ci aspettiamo che dopo n passi la pedina abbia fatto una certa strada, anche se non sappiamo in quale direzione.

Si può dimostrare che mediamente dopo *n* passi la pedina si sarà spostata dal punto di partenza di una distanza $\sqrt{n}$.
Notiamo che se la pedina si muovesse sempre nella stessa direzione percorrerebbe una distanza n; cambiando continuamente direzione percorre invece una distanza minore.

Così, pur in un fenomeno il cui intimo "motore" è casuale e imprevedibile, riusciamo a calcolare il "valore atteso" di certe quantità, che si rivelano ottime approssimazioni dei valori statisticamente assunti da grandezze reali.

La possibilità di scoprire un ordine anche nel caso, al punto da poter usare quest'ordine per previsioni accurate, oltre che molto utile, è qualcosa di estremamente affascinante.

Matematiche ESEMPLARI

Probabilità, passeggiate aleatorie E PROCESSI CASUALI

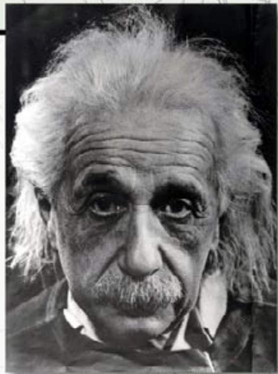
Dalla scacchiera al moto browniano alla moderna teoria dei processi casuali

Traiettoria di un moto browniano

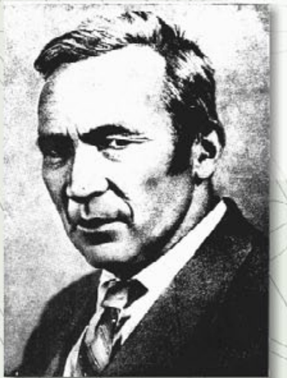
Ma la storia non finisce sulla scacchiera. Nel 1905 **Einstein** spiega in modo quantitativamente accurato il **moto browniano**, ossia il moto caotico delle piccole particelle di polline sospese nell'acqua: le molecole d'acqua, in perenne agitazione caotica (agitazione termica) colpiscono continuamente il granello di polline (molto più grande), causandone il moto irregolare che effettivamente si osserva.

La passeggiata aleatoria sulla scacchiera è un modello semplificato (nel discreto) di ciò che è il moto browniano (nel continuo).

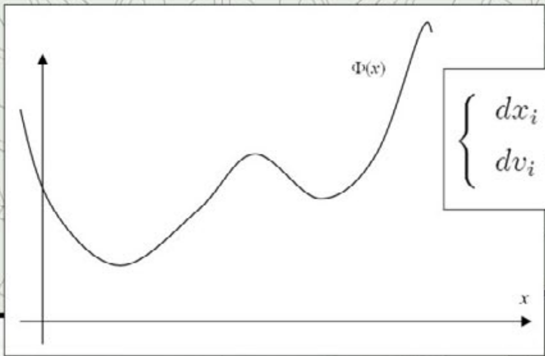
Col nascere della teoria moderna della probabilità e dei processi *stocastici* (cioè casuali), fondata da **Kolmogorov** negli anni '30, si scopre che il modello matematico del moto browniano è utilissimo a descrivere ad esempio molti fenomeni (fisici, chimici...) dove una piccola perturbazione casuale si sovrappone a un'azione fisica deterministica.



Albert Einstein (1879-1955)



Andrej Nikolaevič Kolmogorov (1903-1987)



$$\begin{cases} dx_i = v_i dt \\ dv_i = -\beta v_i dt - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} dt + \sqrt{\frac{2\beta k T}{m}} dw_i \end{cases}$$

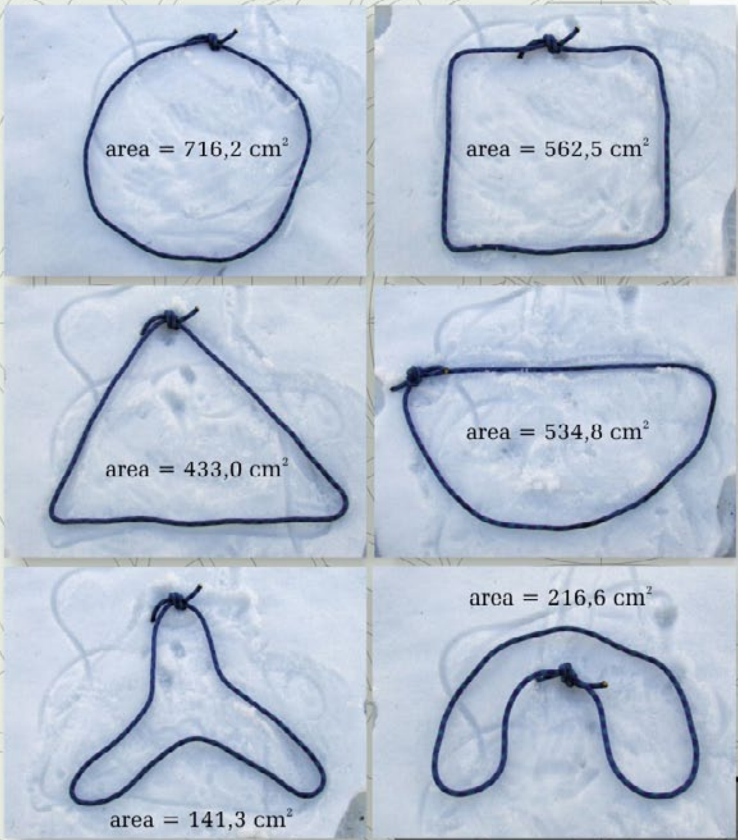
Vari fenomeni di "superamento di una barriera di potenziale" (che possono descrivere ad esempio una reazione chimica) si rappresentano matematicamente come sistemi di equazioni differenziali stocastiche.

Come spesso accade, la comprensione profonda della matematica di un certo fenomeno diventa strumento di comprensione della realtà in campi lontanissimi tra loro.

Matematiche ESEMPLARI

Simmetrie ESTREME

Quando la soluzione è semplice e simmetrica



Una corda lunga circa 1 metro viene disposta in varie forme. Confrontiamo l'area racchiusa. L'area è massima nel caso della circonferenza.

Qual è, fra tutte le figure piane di perimetro assegnato, quella di area massima? La domanda esprime il **problema isoperimetrico** classico nel piano. La risposta, abbastanza intuitiva, è: il cerchio.

L'analogo problema nello spazio è:
Qual è, fra tutti i solidi il cui bordo ha area assegnata, quello di volume massimo?
Risposta: la sfera.

A dispetto della intuitività delle risposta, una dimostrazione rigorosa di questi risultati è *difficile*. Il problema isoperimetrico (nella sua formulazione generale in dimensione n) è stato risolto completamente negli anni 1950 da ***Ennio De Giorgi***, con la nascita della ***teoria geometrica della misura***, una branca della matematica al confine tra la geometria e l'analisi matematica.

Ennio De Giorgi (1928-1996)

Perché è difficile dimostrare questi teoremi?

Per dimostrare che "fra tutte le figure piane di perimetro assegnato, quella che racchiude l'area massima è il cerchio" occorre confrontare una figura semplice (il cerchio) con "qualsiasi altra figura". E descrivere una figura "qualsiasi" può essere molto difficile. Occorre quindi inventare teorie matematiche che permettano di misurare area e perimetro anche di insiemi molto complicati e di delimitare bene l'universo delle figure in cui cerchiamo la soluzione del problema.

Matematiche ESEMPLARI

Simmetrie ESTREME

Il "teorema del tamburo"

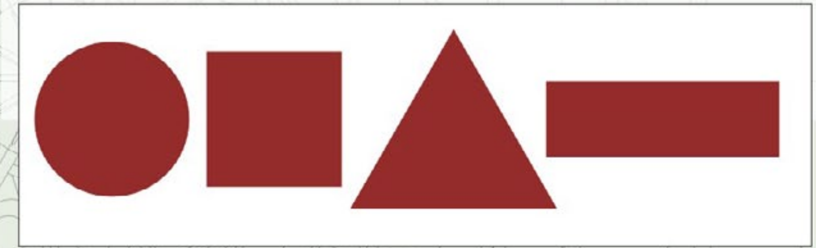
Esistono problemi aventi anche un significato fisico, il cui enunciato è simile a quello dei problemi isoperimetrici di tipo geometrico. Ne indichiamo uno:

Congettura di Rayleigh (1877) sulla frequenza fondamentale di una membrana elastica:
fra tutte le membrane vibranti (di materiale fissato, omogenee), fissate al bordo e di area fissata, quella che ha la più bassa frequenza fondamentale di vibrazione è quella circolare.

Interpretazione musicale:
fra tutti i tamburi di forma qualsiasi e area fissata, quello che produce la nota più bassa è quello circolare.
La congettura è stata dimostrata da Faber (1923) e Krahn (1925), e il teorema relativo è chiamato anche "teorema del tamburo".

Supponiamo che un tamburo circolare con diametro di 30 cm produca una nota LA (frequenza 440 Hz). Un tamburo di forma diversa, area uguale, uguale tensione e tipo di membrana produrrebbe una nota più alta, ad esempio:

	Frequenza	Nota musicale
Cerchio	440 Hz	LA
Quadrato	456 Hz	LA# (calante)
Triangolo equilatero	493 Hz	SI
Rettangolo di proporzioni 3 x 1	592 Hz	RE (crescente)



C'è un fatto estetico, molto apprezzato dai matematici, che val la pena di notare:
all'interno di una classe di oggetti generici (quindi anche molto complicati e "brutti") è proprio l'oggetto più semplice e simmetrico a rendere massima o minima (si dice "estrema") una certa quantità.

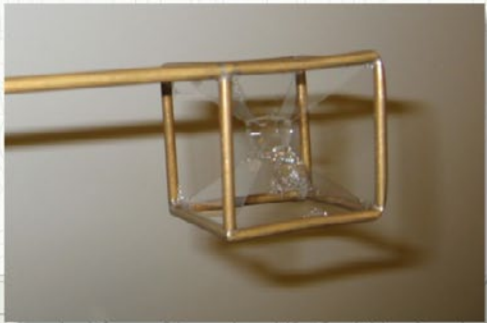
Simmetrie ESTREME

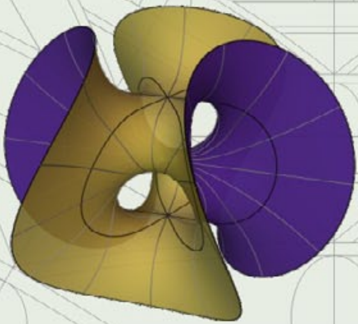
Massimi e minimi ieri e oggi

In vari campi delle scienze accade spesso di dover risolvere problemi di massimo o minimo, cioè determinare l'oggetto (rappresentato da una funzione, un insieme…) che rende massima o minima una certa quantità, avente di volta in volta vari significati fisici. I problemi isoperimetrici che abbiamo incontrato sono di questo tipo, ma vi sono molti altri esempi:

- il tragitto di tempo minimo di un raggio luminoso che attraversa mezzi differenti,
- la configurazione di un sistema meccanico che rende minima la sua energia,
- la superficie di area minima che si appoggia ad una data curva nello spazio.

La disciplina matematica che si occupa di questi problemi prende il nome di *calcolo delle variazioni*. Nato intorno al 1700, questo settore è tuttora fertile e in sviluppo. Come nel caso del problema isoperimetrico classico, solo grazie agli strumenti astratti sviluppati nel XX sec. è stato possibile inquadrare i problemi del calcolo delle variazioni in una teoria soddisfacente.





La teoria delle superfici minime (superfici di area minima che si appoggiano ad un bordo assegnato, come fanno ad esempio le bolle di sapone) ha avuto sviluppi importanti anche negli ultimi decenni.